GÉOMÉTRIE ET POLYNÔMES
Planche 1 : Géométrie

1 Vecteurs du plan et de l'espace

Exercice 1. * On considère les vecteurs :

$$u' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Calculer, lorsque cela a un sens, les combinaisons linéaires suivantes :

$$u' + 3v',\ 2u' - v',\ u' + v' - u,\ 2u + v - w,\ 4w,\ u' + 7w.$$

2. Déterminer si, parmi les vecteurs u, v et w il y en a deux qui sont colinéaires.
3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ? Et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
4. Les vecteurs u' et v' forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Même question pour les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. * On considère les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.
1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les deux vecteurs sont colinéaires.
2. Même question pour les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère les deux vecteurs du plan $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer le déterminant de u et v.
2. Écrire sous forme de système l'équation vectorielle

$$xu + yv = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

où x et y sont les inconnues et a et b des paramètres réels. En vue du point précédent, que peut on dire du nombre de solutions du système ?
3. Résoudre le système en fonction des paramètres a et b.
4. Reprendre les points précédents pour les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. * Soient $A\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ trois points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?

Exercice 5. *

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans $\mathbb{R}^2$. Exprimer ses diagonales $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de ses côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Montrer que les diagonales d'un parallélogramme s'intersectent au milieu de leurs longueurs.

Exercice 6. Formuler et démontrer un résultat analogue à l'exercice précédent pour les diagonales des parallélépipèdes dans l'espace.

2 Produit scalaire, orthogonalité et norme.

Exercice 7. Calculer les normes $\|u\|$, $\|v\|$, le produit scalaire $u \cdot v$, le cosinus de l'angle non orienté entre les vecteurs u et v, ainsi que le projecté orthogonal de u sur v et de v sur u.

1. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{27} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Vérifier que les repères suivants sont orthonormés (les vecteurs sont de norme 1 et deux-à-deux orthogonaux).

1. $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Montrer que les diagonales d'un losange sont orthogonales.

Exercice 10. *

1. Trouver un vecteur w de norme 1, orthogonal aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Trouver un vecteur c de norme 1, qui forme l'angle $\pi/3$ avec les vecteurs $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Calculer l'angle formé par les diagonales des deux faces adjacentes dans un cube.

3 Droites dans le plan

Exercice 12. On considère les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que ces trois points sont alignés.

2. Donner une équation paramètrique, puis cartesienne de la droite par ces trois points.

3. On pose $D \begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que A, B et D soient alignés.

Exercice 13. Dans le plan, soient $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $x+y=1$. Déterminer de façon géométrique (avec un dessin) et algébrique l'intersection de ces deux droites.

Exercice 14. On considère les trois points $A\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan qui vérifient $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$.

2. En déduire une équation cartésienne et paramétrique de la droite perpendiculaire à la droite BC et passant par A.

Exercice 15. * Dans $\mathbb{R}^2$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite passant pas les points $A\binom{1}{1}$ et $B\binom{2}{1}$.

2. Droite passant par le point $C\binom{1}{2}$ et de vecteur directeur $u = \binom{-1}{3}$.

3. Droite passant par le point $P\binom{1}{1}$ et orthogonale à la droite d'équation $3x+4y+5=0$.

Exercice 16. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trouver les points d'intersection des droites d_1 et d_2 décrites par les équations suivantes :

1. $d_1 : 2x+5y+1=0$ et $d_2 : x-2y-4=0$,

2. $d_1 : \binom{1}{2} + s\binom{2}{1},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : 3x-2y-4=0$,

3. $d_1 : \binom{1}{2} + s\binom{2}{3},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \binom{3}{2} + t\binom{4}{5},\ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. (Partiel 2015/2016) On rappelle que la *médiatrice* d'un segment est la droite orthogonale à ce segment et passant par son milieu.
Soient $A\binom{2}{3}$, $B\binom{0}{-1}$ et $C\binom{4}{1}$ trois points du plan.

1. Donner une équation paramétrique de la médiatrice m_{AB} du segment $[AB]$.
2. Soit $D \in m_{AB}$. Montrer que $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$.
3. Donner une équation cartésienne de la médiatrice m_{AC} du segment $[AC]$.
4. Trouver le point M d'intersection des médiatrices m_{AB} et m_{AC}.
5. Montrer que $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CM}\|$.

Exercice 18. * Calculer la distance entre le point $A\binom{5}{2}$ et la droite $d : x+6y+3=0$ dans $\mathbb{R}^2$.

4 Produit vectoriel

Exercice 19. * Calculer les produits vectoriels des vecteurs u et v suivants.

1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, **2.** $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **3.** $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20. Soient les trois points de l'espace $A\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Calculer l'aire de ce parallélogramme.

Exercice 21. Soient les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $u = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $\|u \wedge v\|$, puis $\|u\|$ et $\|v\|$.
2. En déduire l'ensemble des t tels que l'angle entre u et v soit $\pm\pi/3$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme de côtés u et v.

Exercice 22. * Calculer les aires des figures suivantes.
1. Parallélogramme engendré par les vecteurs $a = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$.
2. Triangle de sommets $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$.
3. Parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 23. * Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix}$.

5 Droites et plans dans l'espace

Exercice 24. * Déterminer une équation paramétrique puis cartésienne de la droite de l'espace passant par les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$. Vérifier qu'il ne s'agit pas d'une droite vectorielle (c'est-à-dire, elle ne contient pas l'origine) et donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite vectorielle parallèle à la droite par A et B.

Exercice 25. * Dans $\mathbb{R}^3$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.
1. Droite passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$.
2. Droite passant par le point $C\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
3. Droite étant l'intersection des plans $P_1 : 6x+2y-z-9=0$ et $P_2 : 3x+2y+2z-12=0$.
4. Droite passant par le point $Q\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ et orthogonale au plan $P : 3x-y+2z-6=0$.

Exercice 26. *
1. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = t - s \\ z = -1 + 2t - s \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 27. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan passant par le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Plan passant par le point $B \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $x = 0$.

3. Plan passant par l'origine et engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Plan passant par les points $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $R \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 28. * (Partiel 2014/2015) Pour tout réel $m \in \mathbb{R}$, on considère le plan P_m de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne

$$m^2 x + (2m - 1)y + mz = 3.$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre m le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à P_m ?

2. Pour quelle valeur de m le vecteur $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il orthogonal à P_m ?

Exercice 29. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les points d'intersection des plans p_1 et p_2 donnés par les équations suivantes.

1. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : x + y + 5z - 2 = 0$.

2. $p_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. * Pour les triplets de points de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont alignés ou pas. Si oui, donner une équation cartésienne de la droite qui les contient et, si non, une équation paramétrique du plan qui les contient.

1. $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 31. * Pour chacune d'équations suivantes (cartésienne ou paramétrique), préciser si elle définit une droite ou un plan dans $\mathbb{R}^3$. S'il s'agit d'une droite, en donner deux points distincts, s'il s'agit d'un plan, en donner trois points distincts non alignés.

1. $2x+3y+z+5=0,$ **2.** $\begin{cases} x=-5t+1 \\ y=2t+3 \\ z=-t+2 \end{cases}, t\in\mathbb{R},$

3. $\begin{cases} 2x+y+2z-2=0 \\ x=0, \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x=-5t+1 \\ y=2t+3 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Exercice 32. * Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
1. Le point $A\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ appartient à la droite d : $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$.
2. La droite d : $\begin{cases} 2x+y-z+3=0 \\ x-2y+z-5=0 \end{cases}$ est contenue dans le plan $p : 5y-3z+13=0$.
3. Le point $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ appartient au plan p : $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
4. La droite d : $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$, est parallèle au plan $p : x+y-z+3=0$.

Exercice 33. * Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+\frac{t\sqrt{6}}{6} \\ y=\frac{t\sqrt{6}}{6} \\ z=\frac{2t\sqrt{6}}{6} \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Soit Δ la droite intersection des deux plans d'équations cartésiennes :
$$x+y+z-1=0 \qquad \text{et} \qquad x-y-2=0.$$
Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 34. *
1. Calculer la distance entre le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et la droite d : $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.
2. Calculer la distance entre le point $B\begin{pmatrix}10\\3\\1\end{pmatrix}$ et le plan p : $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $s,t\in\mathbb{R}$.
3. Calculer la distance entre les plans parallèles d'équations $2x-y+3z=0$ et $-4x+2y-6z+8=0$.

Exercice 35. Soient P_1 et P_2 les plans de l'espace d'équations cartésiennes :

$$P_1\ : 2x+y-1+3=0 \qquad \text{et} \qquad P_2\ : -x+z=0.$$

Soit α l'angle aigu entre ces deux plans. On note n_1 et n_2 les vecteurs normaux de P_1 et P_2 respectivement. On suppose que n_1 et n_2 sont de norme 1, et ont leur première coordonnée positive.

1. Déterminer les coordonnées de n_1 et n_2.
2. Montrer que α est l'angle aigu entre n_1 et n_2.
3. En déduire $\sin(\alpha)$.