COURS

A. PREMIÈRE PARTIE : LE PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1 *Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace*

1.1. PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

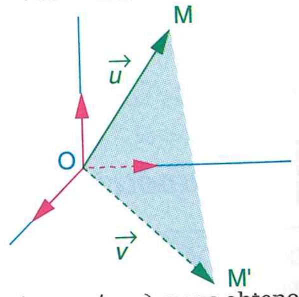
Choisissons un repère **orthonormal** et associons à tout couple de vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$, $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$, le nombre $xx'+yy'+zz'$.
Nous pouvons traduire l'orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par une « **formule simple** » : $xx'+yy'+zz'=0$, et calculer la norme de $\vec{u}$, par exemple, par une « *formule simple*, elle aussi :

$$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2+z^2.$$

Notez que cette expression est de la forme : $xx'+yy'+zz'$, avec $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$.
Tout cela a été vu en classe de Premières.
Le nombre $xx'+yy'+zz'$ est appelé produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.

1.2. LE PRODUIT SCALAIRE EST INDÉPENDANT DU CHOIX DU REPÈRE

Dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$, $(x'\,;\,y'\,;\,z')$. Alors leur produit scalaire dans $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ est $xx'+yy'+zz'$. Supposons que dans un autre repère orthonormal, $(O'\,;\,\vec{i'},\,\vec{j'},\,\vec{k'})$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient $(X\,;\,Y\,;\,Z)$, $(X'\,;\,Y'\,;\,Z')$. Alors leur produit scalaire dans ce repère est : $XX'+YY'+ZZ'$. Montrons que : $xx'+yy'+zz'=XX'+YY'+ZZ'$.



Pour cela, notons M et M' les points tels que :

$$\overrightarrow{OM}=\vec{u},\quad \overrightarrow{OM'}=\vec{v}.$$

Alors, dans $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$:

$$OM^2=x^2+y^2+z^2$$
$$OM'^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

et, puisque le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x'-x\,;\,y'-y\,;\,z'-z)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}MM'^2&=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\\&=x'^2+y'^2+z'^2+x^2+y^2+z^2-2(xx'+yy'+zz').\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}2(xx'+yy'+zz')&=OM^2+OM'^2-MM'^2\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $xx'+yy'+zz'$ ne dépend que de la longueur de $\vec{u}$, de la longueur de $\vec{v}$, et de la longueur de $\vec{v}-\vec{u}$. Or, ces trois longueurs sont des données constantes, dès que sont donnés les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En calculant $2(XX'+YY'+ZZ')$ dans $(O'\,;\,\vec{i'},\,\vec{j'},\,\vec{k'})$, nous trouverions donc aussi : $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$, d'où le résultat.

1.3. CONCLUSION

DÉFINITION 1

Nous pouvons donc définir **LE produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, comme étant le nombre :

$$xx'+yy'+zz'$$

où $(x\,;\,y\,;\,z)$, $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ sont les coordonnées de ces vecteurs dans un repère **orthonormal** arbitrairement choisi.

Notation : comme en géométrie plane, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1.4. UNE AUTRE EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE

Nous avons prouvé au paragraphe **1.2.** que :

$$\boxed{2(\vec{u}\cdot\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2.}$$

2 *Propriétés et autres expressions du produit scalaire*

2.1. RÈGLES DE CALCULS DU PRODUIT SCALAIRE

Les règles de calculs du produit scalaire dans l'espace sont analogues aux règles de calcul du produit scalaire dans le plan.

THÉORÈME 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, tous réels a et b :
(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
(2) $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
(3) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

Prouvons par exemple, la proposition (3).
Les autres propriétés se démontreraient de manière analogue.
Choisissons un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ et notons $(x\,;\,y\,;\,z)$, $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ et $(x''\,;\,y''\,;\,z'')$ les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
Alors, $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées : $(x'+x''\,;\,y'+y''\,;\,z'+z'')$.

Donc :
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})&=x(x'+x'')+y(y'+y'')+z(z'+z'')\\&=xx'+xx''+yy'+yy''+zz'+zz''\\&=xx'+yy'+zz'\ +\ xx''+yy''+zz''\\&=\vec{u}\cdot\vec{v}\ +\ \vec{u}\cdot\vec{w}.\end{aligned}$$

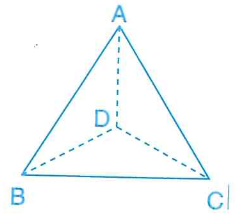
2.2. LE PRODUIT SCALAIRE ET LA RELATION DE CHASLES

La règle (3) : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$, se traduit en disant que le **produit scalaire est distributif par rapport à l'addition.**
Pour calculer un produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u'}$ ou pour démontrer des égalités, il sera souvent avantageux d'écrire $\vec{u'}=\vec{v}+\vec{w}$, grâce à la relation de Chasles, et de calculer alors $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.
L'utilisation du produit scalaire avec la relation de Chasles est une méthode très utilisée soit pour calculer plus facilement, soit pour démontrer des propriétés géométriques.

EXEMPLE D'APPLICATION

Dans le tétraèdre ABCD, on connaît le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$, soit a, et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, soit b. Si l'on veut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$, en fonction de a et de b, on écrira : $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$, d'où :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=b-a.$$



2.3. AUTRES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Nous allons prouver les résultats suivants :

> Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs *coplanaires* $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, avec $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

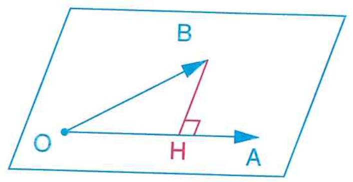
Donc, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, *non nuls* :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

et :

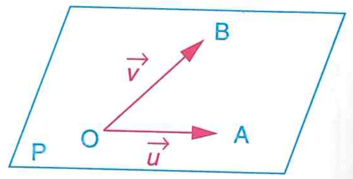
$$\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}}$$

où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).



Démontrons ces résultats.

Deux vecteurs de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, peuvent toujours être représentés par des vecteurs *coplanaires;* en effet, il suffit pour cela de choisir trois points O, A, B tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, et il y a toujours au moins un plan P qui contient ces trois points.



Or, nous avons vu au paragraphe 1 que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$, et cette expression est exactement celle qui donne, **dans le plan P**, le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ (voir « Pour prendre un bon départ », paragraphe 1). Les résultats énoncés se déduisent alors directement des différentes expressions du produit scalaire dans le plan.

Remarque

Lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires :**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

3 Utilité du produit scalaire

3.1. CALCUL DE DISTANCE ET CARRÉ SCALAIRE

Comme dans le cas de la géométrie plane, nous obtenons :

$$\|\vec{u}\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}.$$

En effet, lorsque $\vec{u}=\vec{v}$, l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ conduit à : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|^2$, car $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos 0=1$.

Lorsque $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, nous écrirons aussi : $\overrightarrow{AB}^2$ au lieu de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$, d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}^2=AB^2.}$$

Lorsque $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ est égal à : $a^2+b^2+c^2$, d'où $AB^2=a^2+b^2+c^2$.

On retrouve ainsi le résultat vu en classe de Première.

> **MÉTHODE**
>
> Ainsi, **pour calculer une distance AB,** il suffit de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$.

3.2. VECTEURS ORTHOGONAUX

Nous avons rappelé dans « Pour prendre un bon départ » le résultat suivant : « dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, équivaut à dire que $xx'+yy'+zz'=0$, où $(x\,;\,y\,;\,z)$ et $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal ».

Avec la définition du produit scalaire, nous pouvons énoncer ce résultat sous la forme suivante :

THÉORÈME 1

> Dire que deux vecteurs sont orthogonaux équivaut à dire que leur produit scalaire est nul.

3.3. CALCULS D'ANGLES

L'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ peut permettre de calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$, en particulier lorsqu'on connaît les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormal.

Mais la connaissance de son seul cosinus ne permet pas de déterminer l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Il faudrait pour cela, et ce serait suffisant, connaître aussi son sinus. Nous verrons au paragraphe **8.** comment il est possible de calculer $\sin(\vec{u},\vec{v})$.

4 Orthogonalité de droites et de plans

Rappelons ceci : dire que le **plan P est dirigé** par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ou que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sont des **vecteurs directeurs du plan,** signifie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et que P est parallèle au plan (OAB). Plus généralement, étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de P, si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ le sont, avec $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

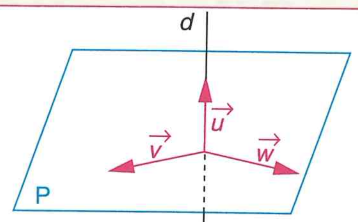
Nous allons interpréter vectoriellement les principaux résultats énoncés dans les classes antérieures au sujet de droites orthogonales et de droites et plans perpendiculaires.

4.1. DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

a/ Point de vue ponctuel

MÉTHODE

Pour démontrer qu'une droite d est perpendiculaire à un plan P, il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites *sécantes* du plan.



d est alors orthogonale à toute droite du plan P.

Interprétation vectorielle

MÉTHODE

Pour démontrer qu'une droite d est perpendiculaire à un plan P, il suffit de démontrer qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d est orthogonal à un couple $\vec{v}$, $\vec{w}$ de vecteurs directeurs de P :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{w}=0.$$

$\vec{u}$ est alors orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont des points de P.
On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ est un *vecteur normal* à P.

b/ Définition d'un vecteur normal à un plan

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$, *non nul*, est normal à un plan P, signifie que la direction de $\vec{u}$ est orthogonale à P. Il en résulte que $\vec{u}$ est orthogonal à tout couple de vecteurs directeurs de P.

Lorsque $\vec{u}$ est normal à P, on dit aussi que P est orthogonal à $\vec{u}$.

Remarques

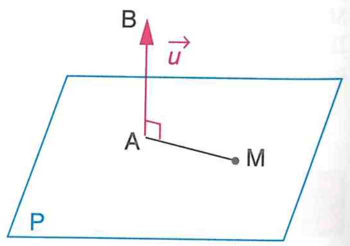
- Si $\vec{u}$ est normal à P, alors $\vec{u}$ est un vecteur directeur de n'importe quelle droite perpendiculaire à P.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à P, alors $\vec{u}$ est normal à tout plan Q parallèle à P.

4.2. CARACTÉRISATION D'UN PLAN PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

A est un point, et $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, un vecteur *non nul*.

Nous savons que l'ensemble des points M tels que les droites (AM) et (AB) soient perpendiculaires est le plan P perpendiculaire en A à (AB). (Nous convenons ici de dire que si M est en A, (AA) est perpendiculaire à AB.)

Or, dire que (AM) et (AB) sont perpendiculaires, équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$. D'où le théorème suivant :



THÉORÈME 2

A est un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Le plan P qui passe par A, et qui est orthogonal à $\vec{u}$, est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$.

4.3. DROITES ORTHOGONALES DANS L'ESPACE

Rappelons que deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement sécantes. Lorsque deux droites sont orthogonales et sécantes, nous dirons qu'elles sont perpendiculaires.

Point de vue ponctuel

MÉTHODE

Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, il suffit de démontrer que d_1 est perpendiculaire à un plan contenant d_2.

Point de vue vectoriel

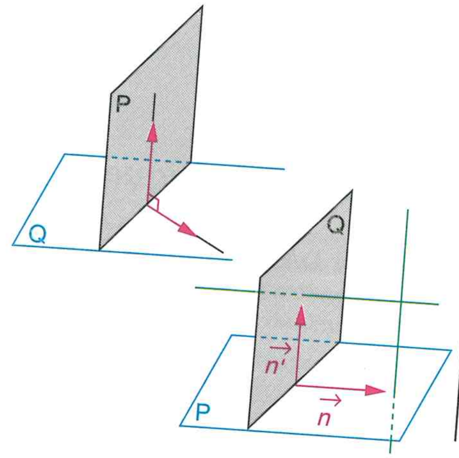
MÉTHODE

Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, il suffit de démontrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

4.4. PLANS PERPENDICULAIRES

Point de vue ponctuel

Par **définition**, dire que deux plans sont perpendiculaires signifie que l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.



Point de vue vectoriel

Deux plans sont perpendiculaires *si et seulement si* un vecteur normal à l'un est vecteur directeur d'une droite de l'autre.

MÉTHODE

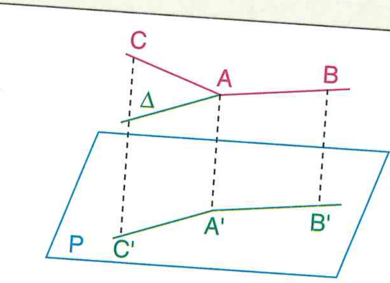
$\vec{n}$ est un vecteur normal à P et $\vec{n'}$ un vecteur normal à Q.
Pour démontrer que les plans P et Q sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux, à savoir $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$.

4.5. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN DE DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

THÉORÈME 3

(AB) et (AC) sont deux droites perpendiculaires en A, qui se projettent orthogonalement sur un plan P, selon deux droites (A′B′) et (A′C′).
- Si (AB) est parallèle à P, alors (A′B′) et (A′C′) sont perpendiculaires.
- Si (A′B′) et (A′C′) sont perpendiculaires, alors (AB), ou (AC), est parallèle à P.

Nous allons démontrer ce théorème.
Auparavant, notons que les droites (AA′), (BB′), (CC′) sont parallèles et donc que les points A, B, A′, B′, d'une part, et les points A, C, A′, C′, d'autre part sont coplanaires.



a/ **On suppose (AB) parallèle au plan P**
Nous allons montrer que, sous cette hypothèse, nous obtenons : (A′B′)⊥(A′C′).
Puisque (AB) est parallèle au plan P et coplanaire avec (A′B′), (AB) est parallèle à (A′B′), donc (AB) est perpendiculaire à (AA′); or, (AB) est aussi perpendiculaire à (AC), donc (AB) est perpendiculaire au plan (AA′CC′). Il en est donc de même de (A′B′), et donc (A′B′)⊥(A′C′).

b/ **On suppose que (A′B′) et (A′C′) sont perpendiculaires**
Nous allons montrer que, sous cette hypothèse, nous obtenons : (AB) est parallèle à P, ou (AC) est parallèle à P.
Supposons (AC) **non parallèle** à P, donc (A′C′) et (AC) sont sécantes.
La droite (A′C′) est orthogonale à (AB) : en effet, elle est orthogonale au plan (AA′BB′), car orthogonale à (AA′) et (A′B′).
La droite (AB), qui est orthogonale aux sécantes (AC) et (A′C′), est donc perpendiculaire au plan (ACA′C′).
Mais il en est de même de (A′B′); en effet (A′B′)⊥(AA′) et (A′B′)⊥(A′C′). Donc (AB) et (A′B′) sont parallèles, donc (AB) est parallèle à P.

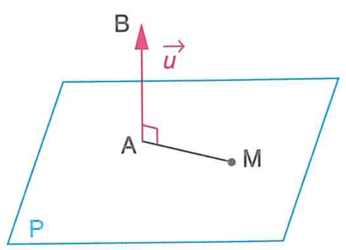
Remarque : on énonce aussi ce théorème sous la forme suivante :
une condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement selon un angle droit, est que l'un de ses côtés au moins soit parallèle au plan sur lequel on projette.

5 *Le produit scalaire en géométrie analytique*

5.1. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

a/ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

P est un plan dont on connaît un point A de coordonnées $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ et un vecteur normal $\vec{u}$ de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$.
P est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$ (théorème 2). Donc, dire que $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à P, équivaut à dire que :



$$(x-x_0)\,a+(y-y_0)\,b+(z-z_0)\,c=0,$$

donc, à dire que : $ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0.$

Cette condition, nécessaire et suffisante, d'appartenance d'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ au plan P est appelée équation cartésienne de P dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cette équation est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0, \quad \text{avec } a,\ b,\ c \text{ non tous nuls.}$$

b/ **Réciproquement,** étant donnés quatre réels a, b, c, d, avec a, b et c, non tous nuls, cherchons l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Choisissons trois nombres x_0, y_0, z_0 tels que : $ax_0+by_0+cz_0+d=0$. Un tel choix est toujours possible. $\left(\text{Par exemple, si } c\neq 0, \text{ on choisit arbitrairement } x_0,\ y_0, \text{ puis on choisit } z_0 \text{ tel que } z_0=\dfrac{-ax_0-by_0-d}{c}.\right)$

Notons A le point de coordonnées $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, qui est non nul par hypothèse.
Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point tel que :

$$ax+by+cz+d=0. \qquad [1]$$

Alors, en remplaçant d par $-ax_0-by_0-cz_0$ dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons successivement des conditions équivalentes à [1] :

$$ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0.$$

Notons P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{u}$.
L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est donc ce plan P.
D'où, en résumé, le théorème suivant :

THÉORÈME 4

> $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère ORTHONORMAL.
> **1.** Tout plan P a une équation de la forme :
> $$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0} \quad \text{avec} \quad (a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0),$$
> et alors le vecteur $\vec{u}$ **(a ; b ; c) est un vecteur normal à P.**
> **2.** a, b, c, d étant quatre réels donnés, avec $(a,\ b,\ c)\neq(0,\ 0,\ 0)$, l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que :
> $$ax+by+cz+d=0$$
> est un plan orthogonal au vecteur $\vec{u}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

EXEMPLE D'APPLICATION
A est le point de coordonnées (2; 3; 1) et $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (1; 0; 1), dans un repère orthonormal. Cherchons dans ce repère une équation du plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{u}$.
Nous pouvons opérer de deux façons :

Première méthode : d'après le théorème **4**, une équation de P est de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ coordonnées de $\vec{u}$, donc de la forme : $x+z+d=0$.
Or le point A, appartient à P, donc : $2+1+d=0$, $d=-3$.
Une équation de P est donc : $x+z-3=0$.

Deuxième méthode : d'après le théorème **2**, P est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$, donc tels que :

$$(x-2)\times 1+(y-3)\times 0+(z-1)\times 1=0$$
$$x+z-3=0.$$

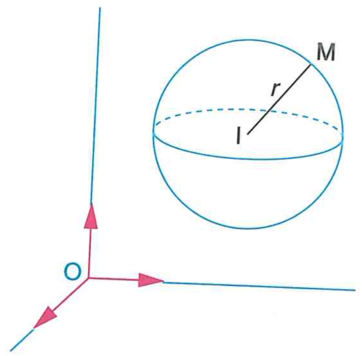
Une équation de P est donc : $x+z-3=0$.

5.2. ÉQUATION D'UNE SPHÈRE

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.
S est la sphère de centre $I(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et de rayon r.
Dire qu'un point M appartient à S équivaut à dire que : $IM^2=r^2$, donc à dire, successivement que :

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{IM}=r^2$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.}$$



Cette relation d'appartenance est appelée «équation de la sphère S».

6 Exercices résolus

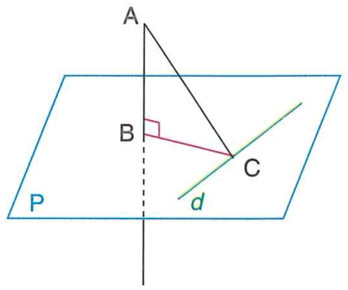
6.1. LE THÉORÈME DES TROIS PERPENDICULAIRES

EXERCICE RÉSOLU 1

d est une droite contenue dans un plan P.
A est un point extérieur à P. B est le projeté orthogonal de A sur P.
Montrez que A et B se projettent orthogonalement sur d en un même point C.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Notons C le projeté orthogonal de B sur d. Il s'agit alors de montrer que C est le projeté orthogonal de A sur d, c'est-à-dire que (AC) est perpendiculaire à d.



1. MÉTHODE sans utiliser le produit scalaire
Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, on démontre que d_1 est perpendiculaire à un plan contenant d_2.

La droite (AC) est dans le plan (ABC). Nous allons démontrer que d est perpendiculaire à ce plan, il en résultera : $d \perp (AC)$. Pour démontrer que d est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de démontrer que $d \perp (AB)$ et $d \perp (BC)$. Or, (AB) est perpendiculaire à P, par hypothèse, donc (AB) est orthogonale à toute droite de P, et donc $(AB) \perp d$. De plus, par hypothèse $d \perp (BC)$, d'où le résultat.

2. MÉTHODE utilisant le produit scalaire
Introduire un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d et montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$.

Pour pouvoir utiliser les hypothèses $(AB) \perp d$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$, et $(BC) \perp d$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$, nous décomposons $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

D'où $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$, d'où le résultat.

■■■■■■■■■■

6.2. INTERSECTION DE PLANS

EXERCICE RÉSOLU 2

Dans un repère orthonormal, deux plans P_1 et P_2 ont pour équations :

$$(P_1) : x - 4y + 7 = 0 ; \quad (P_2) : x - 2z + 5 = 0.$$

Donnez une représentation paramétrique de leur droite d d'intersection, si elle existe.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE
Les points M$(x ; y ; z)$, communs à P_1 et P_2, sont les points tels que : $x - 4y + 7 = 0$ et $x - 2z + 5 = 0$.
Ce sont donc les points dont les coordonnées sont solutions du système

$$\text{(S)} : \begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{soit (S)} : \begin{cases} x - 4y = -7 \\ x - 2z = -5. \end{cases}$$

On résout donc ce système **(S)** qui, *a priori*, soit n'a pas de solution (plans non sécants), soit en a une infinité (plans sécants).
La méthode de Gauss conduit, avec $L_2 \longleftarrow L_1 - L_2$, à :

$$\begin{cases} x - 4y + 0z = -7 \\ - 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{d'où} : \begin{cases} x = 4y - 7 \\ y = \dfrac{1+z}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 + 4z \\ y = \dfrac{1+z}{2}. \end{cases}$$

Les solutions de **(S)** sont donc les triplets : $\left(-3 + 4z ; \dfrac{1+z}{2} ; z\right)$, où z est un réel quelconque.
Les plans P_1 et P_2 sont donc sécants selon une droite d.
Puisque z est un réel quelconque, il suffit de poser $z = t$, pour obtenir une représentation paramétrique de d.

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

■■■■■■■■■■

6.3. RECONNAÎTRE DES PLANS PERPENDICULAIRES, DES PLANS PARALLÈLES

EXERCICE RÉSOLU 3

P et Q sont deux plans d'équations respectives : $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, dans un repère orthonormal.
Justifiez les deux affirmations suivantes :

a/ Dire que P et Q sont parallèles équivaut à dire qu'il existe un réel λ, tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

b/ Dire que P et Q sont perpendiculaires équivaut à dire que $aa' + bb' + cc' = 0$.

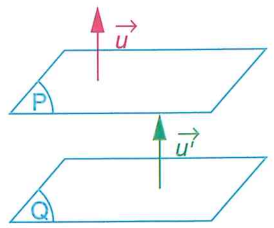
SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Dans les deux cas, nous allons utiliser des vecteurs normaux à P et Q respectivement.

a/ Parallélisme

MÉTHODE
Utiliser le résultat suivant : dire que P et Q sont parallèles équivaut à dire qu'un vecteur normal de Q est colinéaire à un vecteur normal de P.

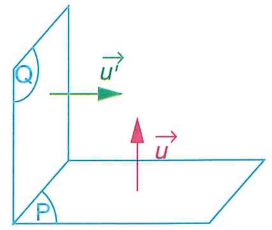
Nous savons (voir théorème 4) que le vecteur $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ est normal à P, et que le vecteur $\vec{u'}\,(a'\,;b'\,;c')$ est normal à Q.
« P parallèle à Q » équivaut à « $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires » et donc à « il existe un réel λ tel que $\vec{u'}=\lambda\vec{u}$ », c'est-à-dire : « il existe un réel λ tel que $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$, $c'=\lambda c$ ».



b/ Orthogonalité

MÉTHODE

Utiliser le résultat suivant : dire que P et Q sont perpendiculaires équivaut à dire qu'un vecteur normal de P est orthogonal à un vecteur normal de Q.



Avec les notations du *a*/, dire que P est perpendiculaire à Q équivaut à dire que $\vec{u}\cdot\vec{u'}=0$, c'est-à-dire à : $aa'+bb'+cc'=0$.

6.4. TROUVER L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

EXERCICE RÉSOLU 4

Dans un repère orthonormal, le plan P a pour équation : $x-2y+3z-1=0$, et la droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-1+2t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Trouvez les coordonnées du point d'intersection du plan P et de la droite d, lorsque ce point existe.

SOLUTION COMMENTÉE

MÉTHODE

Dire qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à P et à d, c'est dire qu'il existe un réel t, tel que :

$$(1-t)-2(2+t)+3(-1+2t)-1=0. \qquad [1]$$

Donc, si cette équation d'inconnue t a une solution t_0, la droite d coupe P au point $M(t_0)$; si cette équation n'a pas de solution, la droite d et le plan P sont parallèles. L'équation [1] s'écrit : $3t=7$.

Elle a une solution : $t_0=\dfrac{7}{3}$. Les coordonnées du point $M(t_0)$, intersection de P et de d, sont donc :

$$x=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3};\quad y=2+\frac{7}{3}=\frac{13}{3};\quad z=-1+\frac{14}{3}=\frac{11}{3}.$$

B. DEUXIÈME PARTIE : LE PRODUIT VECTORIEL

NOTE HISTORIQUE

Le calcul vectoriel, maintenant étudié en Mathématiques, a été utilisé d'abord par les physiciens, les mécaniciens et les ingénieurs. Son origine remonte aux travaux de Hamilton (1805-1865) et, de Grassman (1809-1877), mais son développement est essentiellement dû au physicien Maxwell (1831-1879), au chimiste Gibbs (1839-1903), à l'ingénieur Heaveside (1850-1925). Plus tard, les mathématiciens, faisant abstraction de la nature physique des « vecteurs », ont développé la théorie des espaces vectoriels.
Le produit vectoriel est un outil essentiel en Mécanique et en Physique. Il sert par exemple à définir le moment d'une force en un point, la force magnétique qui s'exerce sur une particule électrique en mouvement dans un champ magnétique; pour un solide en rotation, le produit vectoriel permet de calculer la vitesse d'un point en utilisant le vecteur rotation.

7 *Orientation de l'espace*

Nous allons orienter l'espace comme le font les physiciens. Les physiciens disposent de plusieurs moyens pour orienter l'espace : par l'observateur d'Ampère, par la « règle des trois doigts de la main droite », ou par la « règle de la paume et du pouce ». Nous n'utiliserons que le premier de ces moyens : **l'observateur d'Ampère.**

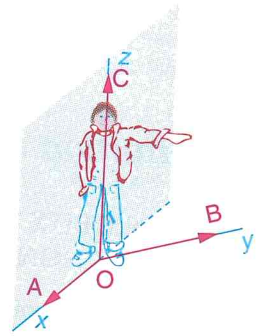
7.1. REPÈRES DIRECTS, BASES DIRECTES

a/ $(O;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})$ est un repère de l'espace; notons Ox, Oy et Oz les demi-droites d'origine O qui contiennent respectivement A, B et C.

Un « **observateur d'Ampère** », pour ce repère, est un personnage placé le long de Oz, les pieds en O et qui regarde dans la direction de Ox.

Si Oy est placé à gauche de l'observateur, on dit que le sens du repère est **direct** (ou *positif*).

Si Oy est placé à droite de l'observateur, on dit que le sens du repère est **indirect** (ou *négatif*).

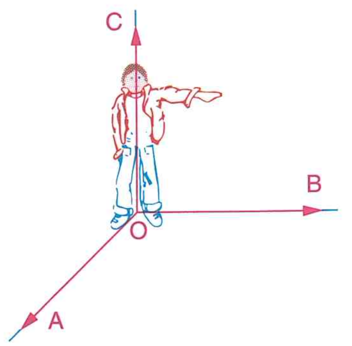


Remarques

1. **L'ordre** dans lequel sont donnés les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est fondamental pour la détermination du sens du repère.

2. La figure ci-contre représente un repère $(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ **orthonormal direct.**

Mais, par exemple, $(O;\ \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est indirect.



b/ Lorsque le repère $(O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct (resp. indirect), on dit que la **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** (resp. indirecte).

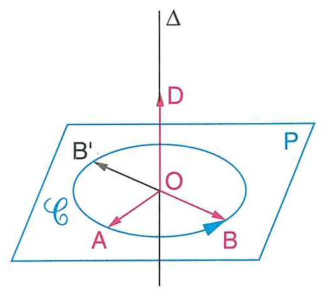
c/ On dit que **« l'on travaille dans l'espace orienté »** pour indiquer que l'on n'utilise que des repères, ou bases, **directs.**

7.2. ORIENTATION D'UN PLAN DANS L'ESPACE

L'espace est orienté ; P est un plan et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, de ce plan.

Considérons la droite Δ perpendiculaire à P en O, et choisissons sur Δ un vecteur directeur, par exemple $\overrightarrow{OD}$; nous avons ainsi orienté la droite Δ.

Soit A et B deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le repère $(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit direct.



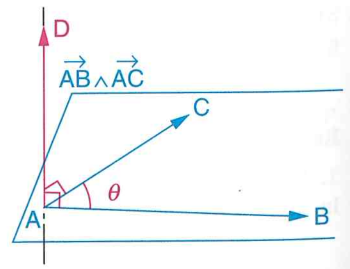
L'orientation du plan P est alors donnée par le repère $(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; le sens direct est celui indiqué par la flèche sur la figure.
Si l'on choisit d'orienter Δ de façon contraire, l'orientation du plan P est alors donnée par le repère $(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'})$; le sens direct est le sens contraire à celui indiqué par la flèche sur la figure.

***En résumé*, dans l'espace orienté, orienter un plan, c'est orienter une normale à ce plan.** On dit que l'orientation d'un plan est donnée par une normale orientée.

8 *Définition du produit vectoriel de deux vecteurs*

8.1. CAS DE DEUX VECTEURS $\overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{AC}$ NON COLINÉAIRES

A, B, C sont trois points non alignés ; ils déterminent donc un plan. On désigne par θ la mesure en radians de l'angle **géométrique** $\widehat{BAC}$.



DÉFINITION 2

> Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de l'espace orienté, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, dans cet **ordre**, noté $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, est le *vecteur* $\overrightarrow{AD}$ défini par les conditions suivantes :
> **1.** la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC);
> **2.** le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est direct;
> **3.** la longueur AD est égale à $AB \times AC \times \sin\theta$.

Remarques

- Ces trois conditions déterminent le point D sans ambiguïté : la première dit que D est sur la perpendiculaire Δ en A au plan (ABC); la deuxième permet de dire sur quelle demi-droite d'origine A de Δ se trouve le point D; la troisième donne la distance de A à D.
- Vous noterez que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = |\text{dét}\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$, et donc que cette norme est égale à l'aire du parallélogramme formé sur les côtés [AB] et [AC] (chapitre 5).
- Notez que (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (AC). **$\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal au plan (ABC).**

8.2. CAS DE DEUX VECTEURS $\overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{AC}$ COLINÉAIRES

> Par **définition**, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur nul.
> Dans ce cas : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Vous noterez que, dans cette définition, parmi les points A, B, C, deux d'entre eux, ou les trois, peuvent être confondus.

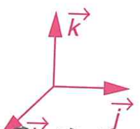
8.3. DÉFINITION DE $\vec{u} \wedge \vec{v}$

a/ Considérons maintenant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace; on peut toujours trouver trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Nous admettrons que si A', B' et C' sont trois autres points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{A'C'}$ alors : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$.
Aussi posons-nous la définition suivante : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ **Conséquences**

1. $\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0;\quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.}$

> Donc, lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à tout plan P dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire à tout plan P qui admet $(\vec{u}, \vec{v})$ pour vecteurs directeurs.



2. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une *base orthonormale directe*. Alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ (voir schéma ci-dessus).

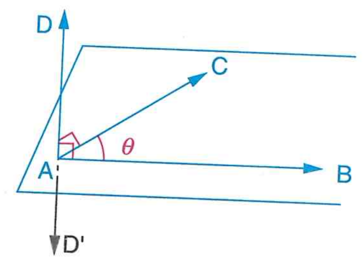
9 *Propriétés du produit vectoriel. Expression analytique*

9.1. AUTRES RÈGLES DE CALCUL DU PRODUIT VECTORIEL

a/ Nous avions $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; notons :

$$\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}.$$

D'après la définition, D' est symétrique de D par rapport à A, donc $\overrightarrow{AD'} = -\overrightarrow{AD}$.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

b/ **Nous admettrons** le résultat suivant :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels a et b :

$$(a\vec{u}) \wedge (b\vec{v}) = ab\,(\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}).$$

9.2. CONDITION DE NULLITÉ D'UN PRODUIT VECTORIEL

- Par définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs *non* colinéaires; alors si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les trois points, A, B, C sont *non* alignés.

D'après la définition 2, il existe un point D unique tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.
En effet, la longueur AD, qui est égale à $AB \times AC \times \sin\theta$, n'est pas nulle, puisqu'aucun des réels AB, AC, $\sin\theta$ n'est nul.
Donc, si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.
Nous résumons cette discussion par le théorème suivant :

THÉORÈME 5

Dire que **le produit vectoriel de deux vecteurs est nul,** équivaut à dire que **ces deux vecteurs sont colinéaires.**

9.3. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL DANS UNE BASE ORTHONORMALE DIRECTE $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe. Nous avons vu en **8.3.** que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}. \qquad (1)$$

D'après **9.1.**, nous en déduisons :

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Calculons les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace ayant pour coordonnées respectives $(x\,;\,y\,;\,z)$ et $(x'\,;\,y'\,;\,z')$:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Alors : $$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}).$$

D'après les règles de calcul du produit vectoriel, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k})\\ &\quad + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k})\\ &= (xy' - yx')(\vec{i} \wedge \vec{j}) + (yz' - zy')(\vec{j} \wedge \vec{k}) + (zx' - xz')(\vec{k} \wedge \vec{j}),\end{aligned}$$

soit, compte tenu de **(1)** :

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.}$$

COMMENTAIRE

Pratiquement, pour obtenir les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on procède de la façon suivante : on écrit sur une première ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant la première puis la seconde après la dernière, puis de même les coordonnées de $\vec{v}$ sur une seconde ligne :

$$\begin{matrix} x & y & z & x & y \\ x' & y' & z' & x' & y'. \end{matrix}$$

Pour calculer la *première* coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on calcule le déterminant qui suit la *première* colonne, ce déterminant dans le cas présent est :

$$\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Pour calculer la *deuxième* coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on calcule le déterminant qui suit la *deuxième* colonne, donc ici :

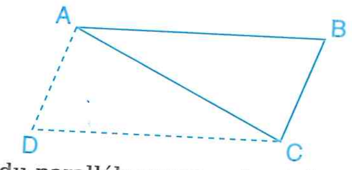
$$\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}$$

et pour calculer la *troisième* coordonnée, on calcule le déterminant qui suit la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

10 *Aire d'un parallélogramme, d'un triangle*

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale au déterminant de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ calculé dans une base orthonormale directe. Or cette aire est la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$ (voir paragraphe **8.1.**), d'où : $\text{aire}(ABCD) = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\|$.



- L'aire d'un triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme de côtés [AB] et [BC], d'où :

$$\boxed{\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\|.}$$

11 *Exercices résolus*

11.1. UTILISATION DU PRODUIT VECTORIEL POUR TROUVER L'ÉQUATION D'UN PLAN

EXERCICE RÉSOLU 1

$(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.
A, B, C sont les points de coordonnées :

$$A(-1\,;\,1\,;\,3)\,; \quad B(2\,;\,1\,;\,0)\,; \quad C(4\,;\,-1\,;\,5).$$

a/ Existe-t-il un plan unique contenant ces trois points ?
b/ Si oui, donnez une équation de ce plan.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

a/ Existence d'un plan passant par ABC.

MÉTHODE

Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, ou $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$, ou ...
Le résultat du calcul permet de savoir si A, B, C sont alignés ou non.
En outre, si A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur **normal** au plan (ABC).

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(3; 0; -3)$, celles de $\overrightarrow{AC}$ sont $(5; -2; 2)$. Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{matrix} 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 5 & -2. \end{matrix}$$

Première coordonnée : $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6.$

Deuxième coordonnée : $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -21.$

Troisième coordonnée : $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6.$

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a donc pour coordonnées : $(-6; -21; -6)$, il n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; A, B et C ne sont pas alignés, et donc ils déterminent un plan et un seul.

b/ Trouvons une équation de ce plan. $\vec{u}$ est normal au plan, et A est dans ce plan. Donc $M(x; y; z)$ appartient à P, à la condition, nécessaire et suffisante, que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

D'où une équation du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} -6(x+1) - 21(y-1) - 6(z-3) &= 0 \\ -6x - 21y - 6z + 33 &= 0 \\ 2x + 7y + 2z - 11 &= 0. \end{aligned}$$

■■■■■■■■■■

11.2. INTERSECTION DE PLANS

EXERCICE RÉSOLU 2

Dans un repère orthonormal, deux plans P_1 et P_2 ont pour équations :

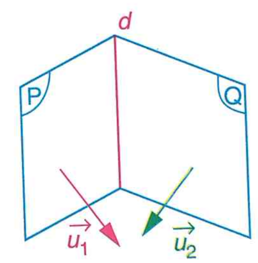
$$P_1 : x - 4y + 7 = 0 ; \qquad P_2 : x - 2z + 5 = 0.$$

Donnez un vecteur directeur de leur droite d'intersection, si elle existe.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Notons $\vec{u_1}$ un vecteur normal à P_1 et $\vec{u_2}$ un vecteur normal à P_2.
Si $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \vec{0}$, alors $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires, donc les plans sont parallèles.
Si $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} \neq 0$, les plans sont sécants. La droite d'intersection d est orthogonale à $\vec{u_1}$ et à $\vec{u_2}$; elle est donc dirigée par $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.



Le vecteur $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ a pour coordonnées $(8; 2; 4)$. Donc les deux plans sont sécants selon une droite d dirigée par $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

Remarque : il suffit alors de trouver un point A commun à P_1 et à P_2 pour trouver une représentation paramétrique de d.
Mais si l'on veut une représentation paramétrique de d, il est préférable en général de procéder comme dans l'exercice résolu 2 du paragraphe **6.2.** La méthode ci-dessus est surtout intéressante pour trouver un vecteur directeur de d.

■■■■■■■■■■