CHAPITRE

3

NOMBRES COMPLEXES

I — APERÇU HISTORIQUE

L'introduction des nombres entiers négatifs est liée à la résolution de l'équation $a + x = b$, où a et b sont deux nombres entiers naturels quelconques.

La résolution de l'équation $ax = b$, où a est un entier naturel non nul et b un entier relatif quelconque conduit aux nombres rationnels.

La représentation des nombres réels par les points d'une droite munie d'un repère met en évidence des nombres non rationnels comme $\sqrt{2}, \pi$, ..., etc. Ces nombres représentent des longueurs de lignes particulières : $\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté a l'unité pour longueur; π est la longueur de la demi-circonférence dont le rayon a pour longueur l'unité.

La résolution d'équations du second degré comme $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$, conduit à la notion de nombre complexe.

A l'origine, Cardan et les algébristes italiens du XVI^{e} siècle n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$, avec a réel strictement positif. En appliquant les règles usuelles de l'époque, Cardan remarque que l'équation du second degré $x^2 - 10x + 40 = 0$ a pour racines $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Il considérait son résultat comme « aussi subtil qu'inutile » et traitait de « sophistiquées » ces racines de nombres négatifs.

En étudiant l'équation du troisième degré $x^3 + px = q$, Cardan trouve, lorsque *p est positif*, la *racine réelle* de cette équation sous la forme :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}.$$

Il est aisé de vérifier que ce nombre est réel et qu'il est bien solution de l'équation $x^3 + px = q$. De plus, l'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 + px - q$ montre que cette fonction ne s'annule qu'une fois (lorsque $p > 0$).

Pour l'équation $x^3 - 15x = 4$, dont 4 est l'unique racine réelle, comme le montre l'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$, la formule de Cardan donne :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}},$$

ce qui fait apparaître des nombres « impossibles » ou « imaginaires ».

C'est Bombelli qui montre l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$, en procédant ainsi :

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{et} \quad (-2 - \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121},$$

par utilisation de règles de calcul connues dans $\mathbb{R}$; ce qui le conduit à :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4.$$

A l'aide des nombres imaginaires et de la formule de Cardan, il « trouve » la racine réelle de $x^3 - 15x = 4$.

Jusqu'au XVIIIe siècle les nombres imaginaires sont utilisés comme symboles purement formels pour étudier des équations algébriques. C'est au XIXe siècle, avec Gauss et Cauchy, que les nombres imaginaires trouveront leur représentation à partir de « réalités mathématiques connues ».

On doit à Gauss le premier exposé complet de la représentation des nombres imaginaires par les points d'un plan muni d'un repère orthonormal. Comme on représentait les réels par les points d'une droite munie d'une origine, d'une unité et d'un sens, la « réalité » des nombres imaginaires était ainsi établie; Gauss les appela *nombres complexes* et il utilisa la lettre i pour désigner cet « impossible » $\sqrt{-1}$.

Cauchy remarque qu'effectuer des calculs sur les nombres complexes revient à appliquer aux nombres réels et à un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$, les règles d'opérations dans $\mathbb{R}$. Ainsi lorsque p est un entier naturel non nul i^{2p} est remplacé par $(-1)^p$ et i^{2p+1} par $(-1)^p i$. Si l'on substitue i à x dans l'expression polynômiale :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels, en appliquant la règle précédente on obtient une expression de la forme $a + ib$, où a et b sont réels. Notons que :

$$\begin{aligned}(a + bi)(a' + b'i) &= aa' + ab'i + ba'i + bb'i^2\\ &= aa' - bb' + (ab' + ba')i.\end{aligned}$$

II — DÉFINITION DU CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Activité

Sur $\mathbb{R}^2$ on définit les deux opérations internes suivantes :

- *addition :* $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- *multiplication :* $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

1° Vérifier les propriétés suivantes :

a) *Associativité de l'addition :* $[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a, b) + [(a', b') + (a'', b'')]$.

b) $(0, 0)$ *est élément neutre pour l'addition :* $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$.

c) $(-a, -b)$ *est l'opposé de* (a, b) : $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0) = (-a, -b) + (a, b)$. *L'opposé de* (a, b) *est aussi noté* $-(a, b)$. *On a donc* $-(a, b) = (-a, -b)$.

d) *Commutativité de l'addition :* $(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$.

e) *Associativité de la multiplication :* $[(a, b)(a', b')](a'', b'') = (a, b)[(a', b')(a'', b'')]$.

f) *Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :*

$$(a, b)[(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)(a', b') + (a, b)(a'', b'')$$

et

$$[(a', b') + (a'', b'')](a, b) = (a', b')(a, b) + (a'', b'')(a, b).$$

g) $(1, 0)$ *est élément neutre pour la multiplication :* $(1, 0)(a, b) = (a, b)(1, 0) = (a, b)$.

h) *Commutativité de la multiplication :* $(a, b)(a', b') = (a', b')(a, b)$.

i) *Tout élément* (a, b) *distinct de* $(0, 0)$ *admet pour inverse* $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$:

$$(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)(a, b) = (1, 0).$$

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés précédentes, on dit que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations un corps. On l'appelle corps des nombres complexes et on le note $\mathbb{C}$.

2° On pose $i = (0, 1)$. *Vérifier* $i^2 = -(1, 0)$; i^2 *est donc l'opposé de l'élément neutre pour la multiplication.*

3° a) Démontrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, *noté* $\mathbb{R}_1$, *formé des couples de la forme* $(a, 0)$ *contient la somme et le produit de deux quelconques de ses éléments et contient l'inverse de chacun de ses éléments non nuls (c'est-à-dire différent de* $(0, 0)$*). En déduire que* $\mathbb{R}_1$ *muni de l'addition et de la multiplication est un corps.* On dit que $\mathbb{R}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

b) On considère l'application φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_1$: $a \mapsto (a, 0)$.
Démontrer que φ *est bijective, que* $\varphi(1) = (1, 0)$ *et que, quels que soient* a *et* a' *de* $\mathbb{R}$:

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a') \quad et \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a').$$

On dit que φ est un **isomorphisme** du corps $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{R}_1$ et que $\mathbb{R}_1$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1 et DÉFINITION 1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication :

$$\begin{aligned}(a, b) + (a', b') &= (a + a', b + b')\\ (a, b)(a', b') &= (aa' - bb', ab' + ba')\end{aligned}$$

est un corps commutatif, d'élément unité $(1, 0)$, appelé corps des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.
Le corps $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{R}$; de plus l'élément $(0, 1)$, noté i, est tel que $i^2 = -(1, 0)$.

NOTATION $a + ib$

Soit $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des complexes de la forme $(a, 0)$, où a est un réel.

La bijection φ de $\mathbb{R}_1$ sur $\mathbb{R}$ qui, à tout élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$ associe le réel a permet d'*identifier* les éléments de $\mathbb{R}_1$ à ceux de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de noter a l'élément $(a, 0)$ de $\mathbb{R}_1$.
Pour tout couple (a, b) on a : $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$, soit en utilisant l'identification précédente et la notation $i = (0, 1)$: $(a, b) = a + ib$.

Tout nombre complexe s'écrit donc sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels. Cette écriture est évidemment unique puisque l'égalité $a + ib = a' + ib'$, avec a, a', b, b' réels signifie que $(a, b) = (a', b')$, c'est-à-dire que $a = a'$ et $b = b'$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 2 et DÉFINITION 2

Pour tout nombre complexe z, il existe un couple (a, b) de réels et un seul tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z et sont notés $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

A noter que le nombre complexe $a + ib$, avec a et b réels, est nul si, et seulement si, $a = b = 0$.

Les nombres complexes *non nuls* de la forme iy, où y est un réel non nul, sont appelés **imaginaires purs.**

L'égalité $(iy)^2 = -y^2$ montre que le carré d'un nombre imaginaire pur est un réel strictement négatif.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Rapportons le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A tout nombre complexe z on associe le point M de coordonnées (Re(z), Im (z)) dans le repère $\mathscr{R}$; on dit que M est le **point-image** de z (figure 1).

Tout point M du plan de coordonnées (a, b) dans le repère $\mathscr{R}$ est évidemment l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de M.

Les nombres réels ont pour images les points de l'axe $x'Ox$ de repère $(O, \vec{e}_1)$ appelé **axe réel.**

Par exemple, l'image du réel 1 est le point $A(1, 0)$.

Les nombres imaginaires purs ont pour images les points de l'axe $y'Oy$, privé de O, de repère $(O, \vec{e}_2)$, appelé **axe imaginaire.**

Ainsi l'image de i est le point $B(0, 1)$.

A tout nombre complexe z, on peut aussi associer le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$(\text{Re}\,(z), \text{Im}\,(z))$$

dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan vectoriel $\mathscr{V}$.

On dit que $\vec{u}$ est le **vecteur-image** de z.

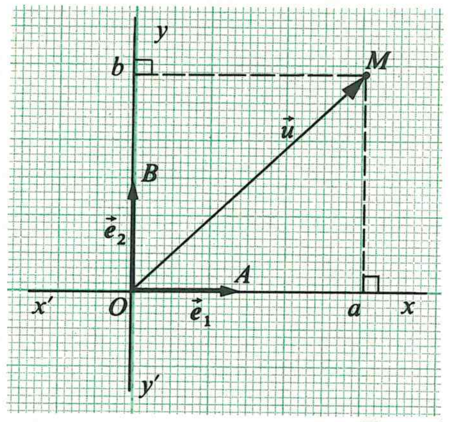

Figure 1

Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{V}$ de coordonnées (a, b) est l'image d'un unique complexe, $z = a + ib$, appelé **affixe** de $\vec{u}$.

RÈGLES DE CALCULS DANS $\mathbb{C}$

Toutes les règles de calculs concernant l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ s'appliquent à $\mathbb{C}$ qui, comme $\mathbb{R}$, est un corps commutatif.

En particulier :

1. La **différence** $z - z'$ de deux nombres complexes z et z' est le nombre complexe $z + (-z')$, où $-z'$ désigne l'opposé de z'.

Si z et z' sont les affixes de M et M', $z - z'$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'M}$.

2. Quels que soient les complexes z, z', z'', on a :

$$z(z' - z'') = zz' - zz''.$$

3. Pour tout complexe z et pour tout entier naturel n on définit z^n par :

$$z^0 = 1 \quad (\text{si } z \text{ est non nul}), \quad z^1 = z, \quad z^2 = zz, \ldots, \quad z^{n+1} = z^n z.$$

Quels que soient les entiers naturels n et p : $z^n z^p = z^{n+p}$ et $(z^n)^p = z^{np}$.

4. Quels que soient les complexes z_1 et z_2 :

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$$
$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2.$$

En particulier :

$$\boxed{\begin{aligned}(\boldsymbol{a} + \mathbf{i}\boldsymbol{b})^2 &= \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{ab}\mathbf{i}\\ (\boldsymbol{a} - \mathbf{i}\boldsymbol{b})^2 &= \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 - \mathbf{2}\boldsymbol{ab}\mathbf{i}\\ (\boldsymbol{a} + \mathbf{i}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \mathbf{i}\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2\end{aligned}}$$

Quel que soit l'entier naturel non nul n :

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + z_1^{n-3}z_2^2 + \ldots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}).$$

En particulier : $\quad 1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}).$

5. Formule du binôme de Newton

Étant donnés deux nombres complexes z_1 et z_2 et un entier naturel n :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k,$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ et où l'on convient de poser $z_1^0 = 1$ et $z_2^0 = 1$, même si z_1 et z_2 sont nuls. Par exemple : $(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2 z_2 + 3z_1 z_2^2 + z_2^3$.

6. L'inverse de tout complexe *non nul* est noté z^{-1} ou $\dfrac{1}{z}$.

- Si $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\,\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Nous retiendrons : $\boxed{(\boldsymbol{a} + \mathbf{i}\boldsymbol{b})^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2} - \mathbf{i}\,\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}}$

- Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}.$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes *non nuls*, le produit $z_1 z_2 \ldots z_n$ est non nul et :

$$\frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_n} = \frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} \times \ldots \times \frac{1}{z_n}.$$

En particulier, si z est un complexe *non nul* et n un entier naturel :

$$\frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

On note $\dfrac{1}{z^n} = z^{-n}$. Avec cette convention et la convention $z^0 = 1$, on a :

- pour tout complexe z non nul et pour tout couple (p, q) d'entiers relatifs :

$$z^p z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq};$$

- pour tout couple (z_1, z_2) de complexes non nuls et pour tout entier relatif p :

$$(z_1 z_2)^p = z_1^p z_2^p.$$

7. Étant donnés deux nombres complexes α et β tels que $\beta \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z tel que $\alpha = \beta z$, à savoir $z = \beta^{-1}\alpha$.

En effet, si le nombre complexe z_1 satisfait $\alpha = \beta z_1$, on obtient en multipliant par β^{-1} les deux membres de cette égalité : $\beta^{-1}\alpha = \beta^{-1}(\beta z_1)$, d'où $\beta^{-1}\alpha = (\beta^{-1}\beta)z_1$, et par suite $z_1 = \beta^{-1}\alpha$. De plus, $\alpha = \beta(\beta^{-1}\alpha)$.

Le nombre complexe $\beta^{-1}\alpha$ est aussi noté $\frac{\alpha}{\beta}$; on l'appelle le **quotient** de α par β.

Exercices résolus

1. *Calculer de deux façons $(1 + \mathrm{i})^8$ et en déduire une expression simple de :*

$$S_1 = 1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$$

et de :

$$S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7.$$

On a : $(1 + \mathrm{i})^8 = [(1 + \mathrm{i})^2]^4$ et $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$,

donc : $(1 + \mathrm{i})^8 = (2\mathrm{i})^4 = 2^4(\mathrm{i}^2)^2 = 2^4(-1)^2 = 2^4$.

Ainsi : $(1 + \mathrm{i})^8 = 16$.

Par ailleurs $(1 + \mathrm{i})^8 = 1 + C_8^1\mathrm{i} + C_8^2\mathrm{i}^2 + C_8^3\mathrm{i}^3 + C_8^4\mathrm{i}^4 + C_8^5\mathrm{i}^5 + C_8^6\mathrm{i}^6 + C_8^7\mathrm{i}^7 + C_8^8\mathrm{i}^8$.

Compte tenu de $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \mathrm{i}^4 = 1, \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}, \mathrm{i}^6 = -1, \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}, \mathrm{i}^8 = 1$, on obtient :

$$(1 + \mathrm{i})^8 = S_1 + \mathrm{i}S_2.$$

Donc : $S_1 = 16$ et $S_2 = 0$.

2. *Démontrer que les vecteurs ayant pour affixes $1 - \mathrm{i}$ et $1 + \mathrm{i}$ forment une base du plan vectoriel $\mathscr{V}$ (figure 2). Trouver les composantes du vecteur ayant pour affixe $3 - \mathrm{i}$ dans cette nouvelle base.*

Désignons par $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et par $\vec{v}$ celui d'affixe $1 + \mathrm{i}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls. S'ils étaient colinéaires, il existerait un réel t tel que $\vec{v} = t\vec{u}$. Comme le vecteur $t\vec{u}$ a pour affixe $t(1 - \mathrm{i})$, on aurait :

$$1 + \mathrm{i} = t(1 - \mathrm{i})$$

soit $t = 1$ et $t = -1$, ce qui est impossible.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont donc non colinéaires : ils forment une base de $\mathscr{V}$.

Désignons par $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $3 - \mathrm{i}$. $(\vec{u}, \vec{v})$ étant une base de $\mathscr{V}$, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, c'est-à-dire $3 - \mathrm{i} = a(1 - \mathrm{i}) + b(1 + \mathrm{i})$.

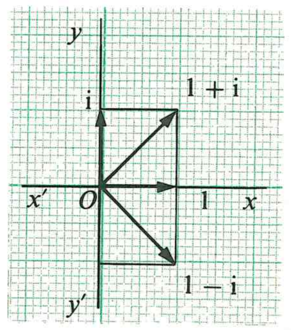

Figure 2

Il s'ensuit $a + b = 3$ et $b - a = -1$, d'où $a = 2$ et $b = 1$.

3. *Résoudre l'équation $z^2 = a$ sur $\mathbb{C}$, où a est un réel donné.*

- Si $a = 0$, la solution est 0.
- Si $a > 0$, $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$; les solutions sont donc $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, $z^2 - a = z^2 - (\mathrm{i}\sqrt{-a})^2$

$$= (z - \mathrm{i}\sqrt{-a})(z + \mathrm{i}\sqrt{-a});$$

les solutions sont donc $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.

4. *Factoriser sur $\mathbb{C}$ les expressions suivantes : $z^2 + 4$ et $z^4 - 1$.*

On a : $z^2 + 4 = (z + 2\mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})$.

$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z + 1)(z - 1)$.

5. *Soient les quatre points A, B, C, D, d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$, -1. Trouver l'affixe g du barycentre G de (A, 1), (B, 2), (C, − 4), (D, 3).*

On a : $$2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OD},$$

d'où $2g = 1 + \mathrm{i} + 2(1 - \mathrm{i}) + 4\mathrm{i} - 3$, soit $g = \frac{3}{2}\mathrm{i}$.

Activité

1° Programmer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

Réponse (TI-62)

[CP]	efface les programmes antérieurs
[LRN] 1	mise en mode programme
[LBL] 1	label de la séquence $z + z'$
[RCL] 1 [+] [RCL] 3 [=] [R/S]	calcule $a + a'$
[RCL] 2 [+] [RCL] 4 [=] [R/S]	calcule $b + b'$
[LBL] 2	label de la séquence zz'
[RCL] 1 [×] [RCL] 3 [−] [RCL] 2 [×] [RCL] 4 [=] [R/S]	calcule $aa' - bb'$
[RCL] 1 [×] [RCL] 4 [+] [RCL] 2 [×] [RCL] 3 [=] [R/S]	calcule $ab' - ba'$
[LBL] 3	label de la séquence $\frac{z}{z'}$
[(] [RCL] 1 [×] [RCL] 3 [+] [RCL] 2 [×] [RCL] 4 [)]	calcule $aa' + bb'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x^2] [+] [RCL] 4 [x^2] [)] [=] [R/S]	divise $aa' + bb'$ par $a'^2 + b'^2$
[(] [RCL] 2 [×] [RCL] 3 [−] [RCL] 1 [×] [RCL] 4 [)]	calcule $ba' - ab'$
[÷] [(] [RCL] 3 [x^2] [+] [RCL] 4 [x^2] [)] [=] [R/S]	divise $ba' - ab'$ par $a'^2 + b'^2$

Exemple d'exécution : $z = 2 - 4i$, $z' = 3 + 5\mathrm{i}$

[LRN]	retour en mode calcul
2 [STO] 1 −4 [STO] 2 3 [STO] 3 5 [STO] 4	entrée des données a, b, a', b'
[GTO] 1 [R/S]	affiche $a + a' = 5$
[R/S]	affiche $b + b' = 1$
[GTO] 2 [R/S]	affiche $aa' - bb' = 26$
[R/S]	affiche $ab' + ba' = -2$
[GTO] 3 [R/S]	affiche $\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \approx -0{,}412$
[R/S]	affiche $\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \approx -0{,}647$

3. On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + i}.$$

Calculer :

$$z_1 + z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^2 + z_2^2, \quad z_1^3 + z_2^3.$$

4. Calculer : $1 + i + i^2 + ... + i^n$.

5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes i, iz soient alignés avec M.

6. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes 1, z, z^2 soient alignés.

7. A tout point M on associe son affixe z et le nombre complexe $Z = z^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
a) $Z \in \mathbb{R}_+$;
b) $Z \in \mathbb{R}_-$;
c) $Z \in \mathbb{R}$;
d) Z soit imaginaire pur.

8. Reprendre l'exercice précédent avec :

$$Z = z^3.$$

9. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$; *b)* $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$.

10. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3).$$

III — MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

DÉFINITION 3 — **Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels, est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que $\bar{z} = a - ib$.**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les points-images de z et $\bar{z}$ sont **symétriques** par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées (figure 3).

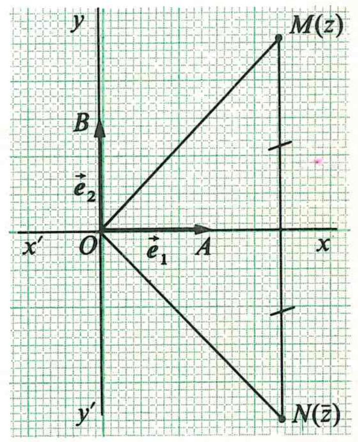

Figure 3

Activité

1° Montrer que l'application $\delta : z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés :
a) Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\delta(z + z') = \delta(z) + \delta(z'), \quad \delta(zz') = \delta(z)\delta(z'),$$
$$\delta(\delta(z)) = z;$$

b) δ est bijective.
c) Pour que le nombre complexe z soit invariant par δ (c'est-à-dire $\delta(z) = z$) il faut et il suffit que z soit réel.

2° Montrer que les seules bijections f de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ laissant chaque réel invariant et telles que pour tous complexes z, z' : $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)f(z')$, sont δ et l'application identique de $\mathbb{C}$.

3° Montrer que si z est un nombre complexe non nul $\delta\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\delta(z)}$.

Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{array}{l} z + \bar{z} = 2\,\mathbf{Re}\,(z) \\ z - \bar{z} = 2\,\mathbf{i}\,\mathbf{Im}\,(z) \\ \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}' \\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \\ z \text{ est réel si, et seulement si, } z = \bar{z} \end{array}}$$

Conséquence

Soit $P(z)$ une expression polynomiale en z à *coefficients réels* :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont réels et z complexe. On a :

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n}.$$

Comme $\overline{z^k} = \bar{z}^k$ et $\bar{a}_k = a_k$, on obtient : $\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \bar{z}^k$, d'où $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Si z_0 est un nombre complexe tel que $P(z_0) = 0$, il s'ensuit que $0 = \overline{P(z_0)} = P(\bar{z}_0)$.

On retiendra :

Si un nombre complexe z_0 est racine d'un polynome P à coefficients réels, son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi racine de P.

Exemples

1. Soit : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors : $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$.

De plus : $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0$, c'est-à-dire : $j^2 + j + 1 = 0$.

Considérons $P(z) = z^2 + z + 1$, j est racine de $P(z)$ et, P étant à coefficients réels, $\bar{j}$ est racine de $P(z)$.

D'où $P(z) = (z - j)(z - \bar{j}) = (z - j)(z - j^2)$, puisque le coefficient de z^2 est 1.

2. Considérons $Q(z) = z^4 + z^2 + 1$.

On constate que $Q(j) = j^4 + j^2 + 1$ et que $j^3 = jj^2 = j\bar{j} = 1$, donc :

$$Q(j) = j + j^2 + 1 = 0.$$

Par suite, j est racine de $Q(z)$. Comme $Q(-z) = Q(z)$ et que Q est à coefficients réels, $-j, \bar{j}$ et $-\bar{j}$ sont aussi racines de $Q(z)$. Les nombres complexes $j, -j, j^2$ et $-j^2$ étant distincts et le coefficient de z^4 étant 1, on obtient :

$$Q(z) = (z - j)(z - \bar{j})(z + j)(z + \bar{j}).$$

On a ainsi factorisé $Q(z)$ dans $\mathbb{C}$.

De plus : $(z - j)(z - \bar{j}) = z^2 - (j + \bar{j})z + 1$,

et : $(z + j)(z + \bar{j}) = z^2 + (j + \bar{j})z + 1$.

Donc : $Q(z) = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1)$.

Soit $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. On a ainsi factorisé $x^4 + x^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour tout nombre complexe z écrit sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels, on a :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Le produit $z\bar{z}$ est donc un réel positif.

DÉFINITION 4 — **On appelle module d'un nombre complexe z, le nombre réel positif, noté $|z|$, et défini par :**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

A noter que le module de z est égal à la distance de l'origine O du repère à l'image M de z : $|z| = OM$.

A noter aussi que si z est réel, son module n'est autre que sa valeur absolue.

Propriétés

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$.

2. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.

3. $|z| = |-z|$, $|z| = |\bar{z}|$.

4. $|zz'| = \sqrt{zz'\bar{z}\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}z'\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z}'} = |z|\,|z'|$.

Il s'ensuit, pour tout entier naturel n : $|z^n| = |z|^n$.

5. Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes d'images respectives M et M' et soit S l'image de $z + z'$ (figure 4).

L'inégalité triangulaire appliquée aux trois points O, M, S donne :

$$OS \leqslant OM + MS,$$

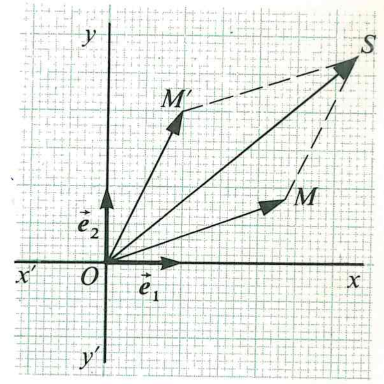

Figure 4

soit $OS \leqslant OM + OM'$. Il en résulte : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Donnons de cette inégalité une démonstration algébrique :

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\bar{z} + \bar{z}');$$

d'où : $$|z + z'|^2 = z\bar{z} + z'\bar{z}' + (z\bar{z}' + \bar{z}z'). \qquad (1)$$

Comme $\overline{z\bar{z}'} = \bar{z}z'$, on a $z\bar{z}' + \bar{z}z' = 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{z}')$.

Or : $$2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{z}') \leqslant 2|z\bar{z}'| = 2|z|\,|z'|.$$

Ainsi, en majorant le deuxième membre de l'inégalité (1), on obtient :

$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Plus généralement : $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

REMARQUE : On utilise souvent l'inégalité : $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$, qui se démontre en remarquant que $z = (z - z') + z'$ et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|z| = |(z - z') + z'| \leqslant |z - z'| + |z'|, \quad \text{soit} \quad |z| - |z'| \leqslant |z - z'|.$$

En échangeant les rôles de z et z', on a aussi $|z'| - |z| \leqslant |z' - z| = |z - z'|$, d'où le résultat. Cette inégalité exprime que la longueur d'un côté d'un triangle est supérieure ou égale à la différence des deux autres.

6. Pour tout complexe *non nul* z on a : $1 = \left|z \dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right|$, d'où $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. Par conséquent :

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|z' \frac{1}{z}\right| = |z'| \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}.$$

Pour tout nombre entier relatif p et tout nombre complexe non nul z, on a :

$$|z^p| = |z|^p.$$

7. Calcul de l'inverse d'un nombre complexe *non nul* z : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}$. Par suite :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Exemple : $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$.

8. Un nombre complexe z est de module 1 si, et seulement si, $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

En effet $|z| = 1$ signifie $z\bar{z} = 1$, soit $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.

Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{array}{c} |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \\ |z| = 0 \quad \text{équivaut à} \quad z = 0 \\ |zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|} \\ |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \\ |z| = 1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{z} = \dfrac{1}{z} \end{array}}$$

■ Exercice résolu

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$, $z - 1$ aient même module.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z - 1|$.

On a $|z| = \dfrac{1}{|z|}$, d'où $|z| = 1$.

Ainsi $|z - 1| = 1$, soit $(z - 1)(\bar{z} - 1) = 1$.

D'où $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$.

Comme $|z| = 1$, on a $z\bar{z} = 1$ et, par suite, $z + \bar{z} = 1$.

En posant $z = x + iy$, avec x et y réels, on obtient $x = \dfrac{1}{2}$.

De plus, $x^2 + y^2 = 1$, d'où $y^2 = \dfrac{3}{4}$.

Finalement, si $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z - 1|$, alors $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que les nombres complexes $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ satisfont les conditions demandées.

● Exercices d'application

11. Démontrer que, si λ est réel, le nombre complexe $\dfrac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$ a pour module 1.
Étudier la réciproque.

12. Calculer z pour que l'on ait :

$$\left|\frac{z - 12}{z - 8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \left|\frac{z - 4}{z - 8}\right| = 1.$$

13. Démontrer que $\dfrac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel si $|u| = 1$. $u \neq 1$
Étudier la réciproque.

d'où ppté du parallélogramme

14. z, z' désignent des nombres complexes. Montrer que :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

15. Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1 + z$ aient même module.

16. Déterminer z pour que z^2, $1 - z$, $\bar{z}$ aient même module.

17. *1°* Étant donnés les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3, montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si :

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1.$$

2° Étant donnés les complexes distincts a et b de module 1, soit A et B leurs images respectives. Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à la droite (AB) si, et seulement si :

$$z + ab\bar{z} = a + b.$$

3° Soit a, b, c, d des nombres complexes de module 1 tels que $a \neq b$ et $c \neq d$, d'images respectives A, B, C, D. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$ab = -cd.$$

IV — ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Avant d'aborder cette partie, il est indispensable de revoir les notions d'angles de vecteurs et d'égalité modulo 2π développées au début du chapitre 7.

NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Soit z un nombre complexe de module 1.

Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal *direct* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, désignons par M l'image de z (figure 5). Les coordonnées (a, b) du point M s'expriment en fonction de toute mesure θ en radians de l'angle de vecteurs $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$ par :

$$a = \|\overrightarrow{OM}\| \cos\theta = \cos\theta,$$
$$b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin\theta = \sin\theta.$$

D'où : $\quad z = \cos\theta + i \sin\theta.$

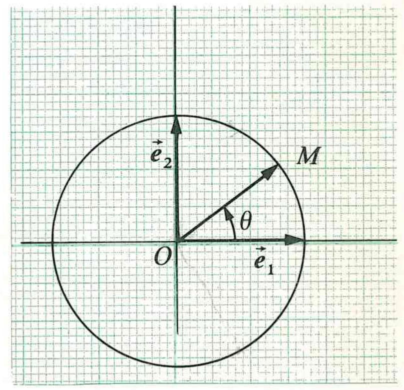

Figure 5

Réciproquement, pour tout réel α tel que $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, on a :

$$\cos\alpha = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \sin\theta;$$

d'où $\alpha = \theta \ (2\pi)$, ce qui montre que α est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$.

DÉFINITION 5 et THÉORÈME 3

On appelle argument d'un nombre complexe z de module 1, tout réel θ tel que :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

L'ensemble des arguments de z est l'ensemble des mesures en radians de l'angle $(\widehat{\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}})$, où M est l'image de z dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Si θ est un argument de z, on note $\arg z = \theta \quad (2\pi)$, ce qui rappelle que tout argument de z, noté $\arg z$, est égal à θ modulo 2π.

Propriétés

1. Nous constatons que si z et z' sont deux nombres complexes de module 1, zz' est de module 1 et $\frac{1}{z} = \bar{z}$ est de module 1. Par suite :

L'ensemble U des nombres complexes de module 1 contient le produit de deux, quelconques, de ses éléments et l'inverse de chacun de ses éléments.

2. Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.

Si $\arg z = \theta \quad (2\pi)$ et $\arg z' = \theta' \quad (2\pi)$, on a :

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{et} \quad z' = \cos\theta' + i\sin\theta'.$$

Donc :
$$\begin{aligned} zz' &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

Ainsi (figure 6) : $\boxed{\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)}$

3. L'égalité $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta).$$

Elle montre que pour tout complexe z de module 1, on a : $\arg\frac{1}{z} = -\arg z \quad (2\pi)$.

De plus, si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Finalement :

$$\boxed{\text{si } |z| = 1, \quad \arg\frac{1}{z} = \arg\bar{z} = -\arg z \quad (2\pi)}$$

Il en résulte que si $|z| = 1$, les images de z et de $\frac{1}{z}$ sont symétriques par rapport à $x'Ox$ (figure 7).

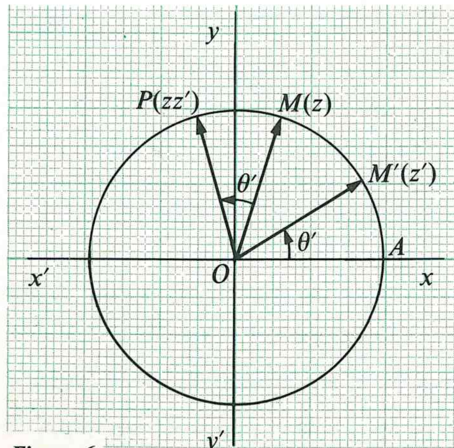

Figure 6

$OA = 1$

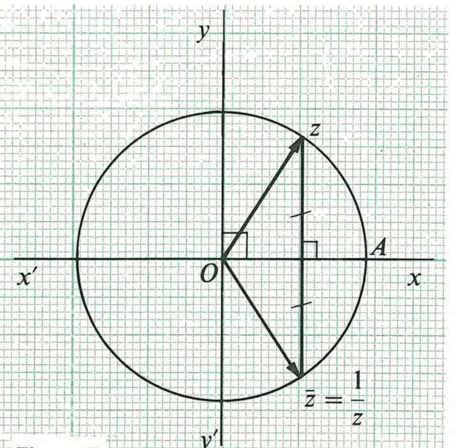

Figure 7

FORMULES DE MOIVRE

Nous avons remarqué :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta').$$

Plus généralement, on démontre par récurrence que :

$$\begin{aligned} &(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots(\cos\theta_n + i\sin\theta_n) \\ &\qquad = \cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n). \quad (1) \end{aligned}$$

Si, dans l'égalité (1) les réels $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont égaux à θ, on obtient :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

De plus, quel que soit l'entier naturel n :

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right)^n = (\cos\theta - i\sin\theta)^n \\ &= (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta). \end{aligned}$$

Il en résulte, quel que soit l'entier relatif p :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta}$$

Cette formule est appelée **formule de Moivre.** Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient :

$$\boxed{(\cos\theta - i\sin\theta)^p = \cos p\theta - i\sin p\theta}$$

Exemples

- 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument 0.
- i est le nombre complexe de module 1 d'argument $\frac{\pi}{2}$.
- $-$ i est le nombre complexe de module 1 d'argument $-\frac{\pi}{2}$.
- $-$ 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument π.
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$; $i^2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$;

  $i^3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$; $i^4 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$.

Plus généralement : $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

- Si j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$\begin{aligned} j &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \\ j^2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}, \\ j^3 &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi, \quad \text{soit :} \end{aligned}$$

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^3 = 1.$$

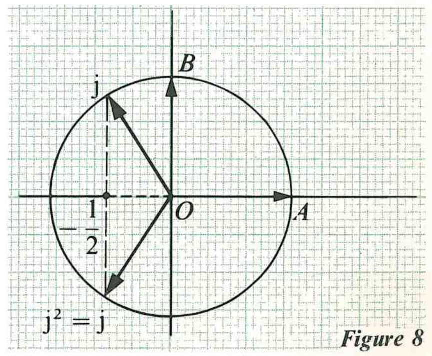

Figure 8

Par suite : $\quad j^{3n} = 1, \; j^{3n+1} = j, \; j^{3n+2} = j^2.$

A noter que : $\quad 1 + j + j^2 = 0.$

REMARQUE : Si n est un entier naturel non nul et k un entier relatif on a :

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

ARGUMENTS D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Pour tout nombre complexe *non nul* z, le quotient $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1.

DÉFINITION 6	**On appelle argument d'un nombre complexe z *non nul* tout argument du quotient $\frac{z}{|z|}$.**

Si θ est un argument de z, on a $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta$, d'où :

$$\boxed{z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)}$$

C'est l'**écriture trigonométrique** du nombre complexe non nul z.

Si θ est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels égaux à θ modulo 2π. On note :

$\arg z = \theta \quad (2\pi).$

Interprétation géométrique

Désignons par M l'image du nombre complexe non nul z et par N l'image de $\frac{z}{|z|}$ (figure 9).

Les arguments de z sont les mesures en radian de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{ON})$, c'est-à-dire les mesures de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$.

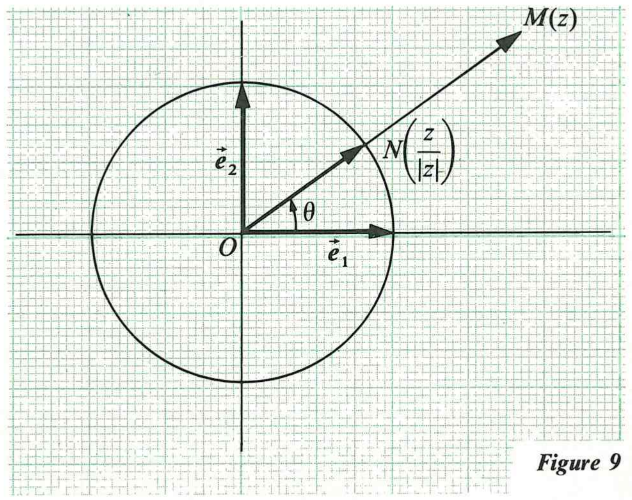

Figure 9

Égalité de deux nombres complexes

Pour que deux nombres complexes z et z' soient égaux, il faut et il suffit que :

$$|z| = |z'| = 0 \quad \text{ou} \quad (|z| = |z'| \neq 0 \quad \text{et} \quad \arg z = \arg z' \quad (2\pi))$$

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

En effet, si z et z' ne sont pas nuls et vérifient $|z| = |z'| = r$ et $\arg z = \arg z' \quad (2\pi)$, posons $\theta = \arg z$ et $\theta' = \arg z'$.

On a : $\quad z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta) \quad \text{et} \quad z' = |z'| (\cos\theta' + i \sin\theta'),$

soit : $\quad z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \quad \text{et} \quad z' = r(\cos\theta' + i \sin\theta').$

De plus, il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$; donc :

$$\cos\theta' = \cos(\theta + k2\pi) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin\theta' = \sin(\theta + k2\pi) = \sin\theta.$$

Par suite, $\; z' = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, d'où $\; z = z'$.

Recherche d'une forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1° Soit $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe *non nul*.

On a $\; |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$; donc $\; \frac{z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Si $\arg z = \theta \quad (2\pi)$, on a $\; z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$, d'où :

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Par suite : $\quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

La connaissance de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ détermine les arguments θ de z.

2° Soit $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, où ρ est un nombre réel :

- Si $\rho = 0$, $\quad z = 0$.
- Si $\rho > 0$, $\quad |z| = \rho \quad$ et $\quad \arg z = \theta \quad (2\pi)$.
- Si $\rho < 0$, $\quad z = (-\rho)(-\cos\theta - i\sin\theta)$
  $\quad = (-\rho)(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)).$

Donc : $\quad |z| = -\rho \quad$ et $\quad \arg z = \theta + \pi \quad (2\pi).$

Propriétés

1. Soit z et z' des nombres complexes *non nuls* d'arguments respectifs θ et θ' :

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta) \quad \text{et} \quad z' = |z'| (\cos\theta' + i \sin\theta').$$

On a : $zz' = |z|\,|z'| (\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$, d'où :

$$zz' = |z|\,|z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')).$$

Ainsi : $\quad \boxed{\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad (2\pi)}$

2. Plus généralement, si $z_1, z_2, ..., z_n$ sont des nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n \quad (2\pi).$$

En particulier, si z est un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul :

$$\boxed{\arg z^n = n \arg z \quad (2\pi)}$$

3. Soit z un nombre complexe non nul.

On a : $\; zz^{-1} = 1, \; \arg 1 = 0 \quad (2\pi)$; donc $\; \arg zz^{-1} = 0 \quad (2\pi)$.

Or : $\; \arg zz^{-1} = \arg z + \arg z^{-1} \quad (2\pi)$; par suite, $\; \arg z + \arg z^{-1} = 0 \quad (2\pi)$,

d'où : $\quad \boxed{\arg z^{-1} = -\arg z \quad (2\pi)}$

4. Soit z un nombre complexe *non nul*, $\bar{z}$ son conjugué et M et N leurs points-images respectifs. On a (figure 10) :

$$(\vec{e}_1, \overrightarrow{ON}) = -(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\boxed{\arg \bar{z} = -\arg z \quad (2\pi)}$$

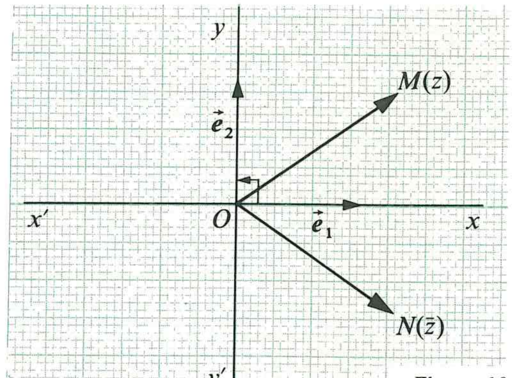

Figure 10

5. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$\arg \frac{z}{z'} = \arg z\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg \frac{1}{z'} \quad (2\pi),$$

d'où :

$$\boxed{\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad (2\pi)}$$

Il en résulte, pour tout entier naturel n *non nul* : $\arg \frac{1}{z^n} = -\arg z^n \quad (2\pi)$, et donc :

$$\boxed{\arg \frac{1}{z^n} = -n \arg z \quad (2\pi)}$$

Comme on a posé $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$ et $z^0 = 1$, on a pour tout entier *relatif* p :

$$\boxed{\arg z^p = p \arg z \quad (2\pi)}$$

6. Les nombres *réels positifs non nuls* sont les nombres complexes d'argument 0.

Les nombres *réels négatifs non nuls* sont les nombres complexes d'arguments π.

Les nombres complexes *imaginaires purs* sont les nombres complexes d'arguments $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $z' - z$

Soit z et z' deux nombres complexes distincts d'images respectives M et M' dans le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, et soit N l'image de $z' - z$ (figure 11).

On a :

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MM'}, \quad |z' - z| = ON,$$
$$\arg (z' - z) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) \quad (2\pi).$$

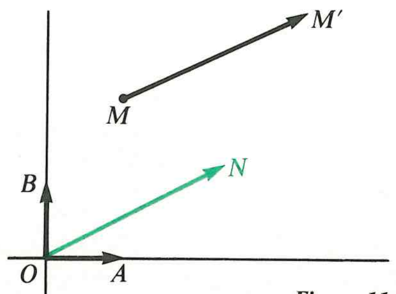

Figure 11

Par suite :

Pour tous nombres complexes distincts z et z' d'images respectives M et M', on a, A étant l'image du nombre 1 :

$$|z' - z| = MM' \quad \text{et} \quad \arg (z' - z) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) \quad (2\pi).$$

Activité

Considérons trois nombres complexes z, z_1, z_2 d'images respectives M, M_1, M_2 dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On suppose $z \neq z_1$ et $z \neq z_2$.

1° Démontrer :

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \frac{MM_1}{MM_2} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = (\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}) \quad (2\pi).$$

2° On suppose $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = \mathrm{i}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 3;$

b) $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi);$

c) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = 3$ *et* $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$

NOTATION $e^{i\theta}$

Pour tout nombre réel θ on pose :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

1. Cette notation vérifie les règles opératoires suivantes :

- $e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$ car $\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = (\cos\theta + i \sin\theta)(\cos\theta' + i \sin\theta')$.
- $e^{i0} = 1$; plus précisément, $e^{i\theta} = 1$ si, et seulement si $\theta = 0 \quad (2\pi)$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos\theta - i \sin\theta$, c'est-à-dire $e^{i(-\theta)} = \overline{e^{i\theta}}$.

Si on pose : $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$, on a donc $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

- $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si $\theta = \theta' \quad (2\pi)$.

2. Formules d'Euler

De $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, il résulte :

$$\boxed{\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})}$$

3. La formule de Moivre s'écrit, pour tout entier relatif p : $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta}$.

4. Dérivée de la fonction $t \mapsto e^{it}$

Une application F d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ s'écrit :

$$F(t) = F_1(t) + iF_2(t), \quad \text{où} \quad F_1(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{et} \quad F_2(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

Par définition F est dérivable en t si F_1 et F_2 sont dérivables en t; dans ce cas, la dérivée de F en t, notée $F'(t)$ est donnée par : $F'(t) = F'_1(t) + \mathrm{i}F'_2(t)$.

Appliquons cette définition à la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t$.

Les fonctions cos et sin étant dérivables en chaque point de $\mathbb{R}$, φ est donc dérivable en tout réel t et on a :

$$\varphi'(t) = -\sin t + \mathrm{i}\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$

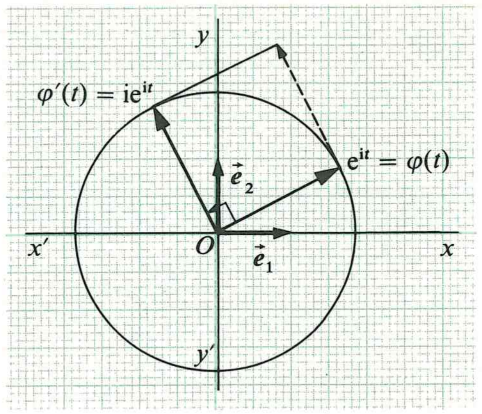

Figure 12

On constate que $\varphi'(t) = \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

Formellement on écrit : $\boxed{\dfrac{\mathbf{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathbf{d}t} = \mathbf{i}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$

5. Si dans l'écriture trigonométrique de tout nombre complexe non nul z d'argument θ, on utilise la notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on obtient : $z = |z|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Si $z = \rho\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ et θ sont des nombres réels, on a :

- lorsque $\rho = 0$: $z = 0$;
- lorsque $\rho > 0$: $|z| = \rho$ et $\arg z = \theta \quad (2\pi)$;
- lorsque $\rho < 0$: $|z| = -\rho$ et $\arg z = \theta + \pi \quad (2\pi)$.

REMARQUES :

Soit $f(t) = a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, où a est un réel positif et ω un réel non nul.

1. $f(t)$ définit un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre O et de rayon a, de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$, de pulsation ω.
$\mathrm{Re}\,(f(t)) = a \cos \omega t$ définit un mouvement rectiligne vibratoire de centre O, d'amplitude a et de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

2. $f'(t) = a\,\mathrm{i}\omega\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $f''(t) = -a\omega^2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, d'où : $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$.
Si l'on pose $g(t) = \mathrm{Re}\,(f(t))$ et $h(t) = \mathrm{Re}\,(g(t))$, g et h sont solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (1)$$

On démontre, et l'on admettra, que toute solution réelle de l'équation différentielle (1) s'écrit sous la forme $\lambda g(t) + \mu h(t)$, où λ et μ sont des réels quelconques. Toute solution réelle de (1) s'écrit aussi sous la forme $C \cos(\omega t - \varphi)$, où C et φ sont des réels quelconques.

Exercices résolus

1. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes :* $z = 1 + \mathrm{i}$, $z' = 1 - \mathrm{i}$.

On a : $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$ et $z' = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$.

Par suite : $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z' = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

2. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :*

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}; \quad z_2 = 1 - \mathrm{i}; \quad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

1° On a $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$, puisque $|z_1| = 2$ et $|z_2| = \sqrt{2}$.

D'où $\arg z_1 = \dfrac{11}{6}\pi \quad (2\pi)$ et $\arg z_2 = \dfrac{7\pi}{4} \quad (2\pi)$.

Donc $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg z = \dfrac{11}{6}\pi - \dfrac{7\pi}{4} \quad (2\pi)$, soit $\arg z = \dfrac{\pi}{12} \quad (2\pi)$.

Ainsi : $$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

2° En utilisant les règles de calcul dans le corps $\mathbb{C}$, on a :

$$z = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})}{(1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Ainsi $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$.

On conclut de *1°* et *2°* que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le point-image M d'un nombre complexe z écrit sous la forme algébrique $x + \mathrm{i}y$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est défini par ses coordonnées (x, y), dites *cartésiennes*, ou *rectangulaires*.

Si z est exprimé sous la forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, le point M est défini par le couple (r, θ) :

$$OM = r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad (2\pi).$$

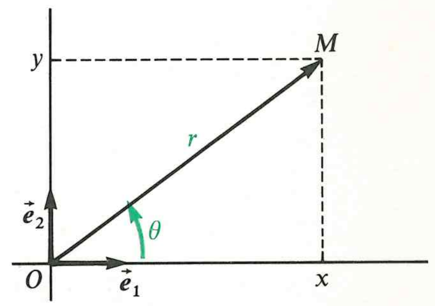

Figure 13

On dit que r et θ sont les **coordonnées polaires** du point M par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_1)$.

Les calculatrices de référence permettent de calculer les coordonnées polaires à partir des coordonnées rectangulaires et inversement. Elles permettent donc de passer de l'une à l'autre des deux écritures $x + \mathrm{i}y$ et $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

Il convient au préalable de placer la calculatrice dans le mode correspondant à l'unité d'angle choisie : degré, grade ou radian.