1. Droites dans l'espace

1.1. Définitions.

Définition 1. *(1) Soit $A \in \mathbb{R}^3$, et u un vecteur non nul. On appelle* ***droite passant par*** *A* ***engendrée par*** *u l'ensemble*

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda u \right\}.$$

On note cet ensemble $A + \mathbb{R}u$. On dit que u est ***un***[1] ***vecteur directeur.***

(2) Soient $A, B \in \mathbb{R}^3$, tels que $A \neq B$. On appelle ***droite passant par*** *A* ***et*** *B l'ensemble*

$$\left\{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \right\}.$$

On note cet ensemble (AB).

(3) Soient $(a,b,c,d), (e,f,g,h) \in \mathbb{R}^4$ tels que (a,b,c) et (e,f,g) ne sont pas colinéaires. On appelle ***droite définie par l'équation cartésienne***

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz + d & = & 0 \\ ex + fy + gz + h & = & 0 \end{array} \right.$$

l'ensemble

$$\{(x,y,z) \mid ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad ex + fy + gz + h = 0\}.$$

(4) Soient $(a,b,c), (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(u_1,u_2,u_3) \neq (0,0,0)$. On appelle ***droite définie par l'équation paramétrique***

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 \\ y & = & b + tu_2 \\ z & = & c + tu_3 \end{array} \right. \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in \mathbb{R}, \quad x = a + tu_1 \text{ et } y = b + tu_2 \text{ et } z = c + tu_3\}.$$

1.2. Lien entre les différentes définitions.

Question 1. *Soient $A, B \in \mathbb{R}^3$, tels que $A \neq B$. Comment trouver un vecteur directeur de (AB) ?*

Réponse. *Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}$ est toujours un vecteur directeur de (AB).*

Question 2. *Soit $A \in \mathbb{R}^3$, et u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ non nul. Comment trouver une équation paramétrique de $A + \mathbb{R}u$?*

Réponse. *Soient a, b, c tels que $A = (a,b,c)$, et soient u_1, u_2, u_3 tels que $u = (u_1,u_2,u_3)$. Soit enfin $M := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $M \in A + \mathbb{R}u$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = a + tu_1$ et $y = b + tu_2$ et $z = cu_3$. Donc*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 \\ y & = & b + tu_2 \\ z & = & c + tu_3 \end{array} \right. \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}$$

est une équation paramétrique de $A + \mathbb{R}u$.

Question 3. *Si $\mathcal{D}$ est la droite définie par l'équation paramétrique*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 \\ y & = & b + tu_2 \\ z & = & c + tu_3 \end{array} \right. \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

où a, b, c, u_1, u_2, u_3 sont des réels tels que $u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$, comment trouver $A \in \mathbb{R}^3$ et u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}u$?

---

1. Ne dites jamais "le".

Réponse. *On pose* $A := (a, b, c)$ *et* $u := (u_1, u_2, u_3)$. *Alors* $D = A + \mathbb{R}u$.

Question 4. *Si* $\mathcal{D}$ *est la droite définie par l'équation paramétrique*

$$\begin{cases} x &= a + tu_1 \\ y &= b + tu_2 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ z &= c + tu_3 \end{cases}$$

où a, b, c, u_1, u_2, u_3 *sont des réels tels que* $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$, *comment trouver des équations cartésiennes pour* $\mathcal{D}$ *?*

Réponse. *Comme* $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$, *il y a un des* u_i *qui est non nul. Supposons que c'est le cas de* u_1. *Si ce n'est pas le cas de* u_1, *adapter ce qui suit en changeant le rôle des lettres.*

$$\begin{cases} x &= a + tu_1 \\ y &= b + tu_2 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ z &= c + tu_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= \frac{x-a}{u_1} \\ y &= b + tu_2 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ z &= c + tu_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= \frac{x-a}{u_1} \\ y &= b + \frac{x-a}{u_1}u_2 \quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \\ z &= c + tu_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= b + \frac{x-a}{u_1}u_2 \\ z &= c + \frac{x-a}{u_1}u_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 y &= b + (x-a)u_2 \\ u_1 z &= c + (x-a)u_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -xu_2 + u_1 y - b + au_2 &= 0 \\ -xu_3 + u_1 z - c + au_3 &= 0 \end{cases}$$

On tombe bien sur des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

Question 5. *Soit* $\mathcal{D}$ *la droite définie par l'équation cartésienne*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ ex + fy + gz + h &= 0 \end{cases}$$

où $anb, c, de, f, g, h \in \mathbb{R}^3$ *sont des réels tels que* (a, b, c) *et* (e, f, g) *ne sont pas colinéaires, comment trouver* $A \in \mathbb{R}^3$ *et* u *un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^3$ *tels que* $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}u$ *?*

Réponse. *Soit* (x_0, y_0, z_0) *un triplet solution de l'équation*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ ex + fy + gz + h &= 0 \end{cases}$$

et soit (u_1, u_2, u_3) *un triplet solution de l'équation*

$$\begin{cases} ax + by + cz &= 0 \\ ex + fy + gz &= 0 \end{cases}$$

tel que $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$. *Alors* $\mathcal{D} = (x_0, y_0, z_0) + \mathbb{R}(u_1, u_2, u_3)$.

2. Plans dans l'espace

2.1. Définitions.

Définition 2. *(1) Soit $A \in \mathbb{R}^3$, et u, v des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires. On appelle plan passant par A engendré par u et v l'ensemble*

$$\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v\}.$$

On le note $A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

(2) Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ tels que A, B et C ne sont pas alignés. On appelle ***plan passant par A, B, C*** *l'ensemble*

$$\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}\}.$$

On le note $\mathcal{P}_{ABC}$.

(3) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b, c) \neq 0$. On appelle ***plan défini par l'équation cartésienne***

$$ax + by + cz + d = 0$$

l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}.$$

(4) Soient $(a, b, c), (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) ne sont pas colinéaires. On appelle ***plan défini par l'équation paramétrique***

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 + sv_1 \\ y & = & b + tu_2 + sv_2 \\ z & = & c + tu_3 + sv_3 \end{array} \right. \quad \text{pour } t, s \in \mathbb{R}$$

l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t, s \in \mathbb{R}, \quad x = a + tu_1 + sv_1 \text{ et } y = b + tu_2 + sv_2 \text{ et } z = c + tu_3 + sv_3\}.$$

2.2. Lien entre les différentes définitions.

Question 6. *Si $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ ne sont pas alignés, comment trouver u et v non colinéaires tels que $\mathcal{P}_{ABC} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$?*

Réponse. *On a toujours $\mathcal{P}_{ABC} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB} + \mathbb{R}\overrightarrow{AC}$.*

Question 7. *Si $A \in \mathbb{R}^3$, et si u, v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, comment trouver une équation paramétrique de $A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$?*

Réponse. *Soient $a, b, c, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ des réels tels que $A = (a, b, c)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Alors $M = (x, y, z) \in A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ si et seulement s'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que $x = a + tu_1 + sv_1$ et $y = b + tu_2 + sv_2$ et $z = c + tu_3 + sv_3$. Donc*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 + sv_1 \\ y & = & b + tu_2 + sv_2 \\ z & = & c + tu_3 + sv_3 \end{array} \right. \quad \text{pour } t, s \in \mathbb{R}$$

est une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Question 8. *Si $\mathcal{P}$ est le plan défini par l'équation paramétrique*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a + tu_1 + sv_1 \\ y & = & b + tu_2 + sv_2 \\ z & = & c + tu_3 + sv_3 \end{array} \right. \quad \text{pour } t, s \in \mathbb{R}$$

où $a, b, c, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ sont des réels tels que (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) ne sont pas colinéaires, comment trouver $A \in \mathbb{R}^3$ et des vecteurs u et v tels que $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$?

Réponse. *On pose $A := (a, b, c)$, $u := (u_1, u_2, u_3)$, $v := (v_1, v_2, v_3)$. Alors $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.*

Question 9. *Si $A \in \mathbb{R}^3$, et u, v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, comment trouver une équation cartésienne de $A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$?*

Réponse. *Soient* x_0, y_0, z_0 *des réels tels que* $A = (x_0, y_0, z_0)$. *Posons* $w := u \wedge v$. *Soient* a, b, c *des réels tels que* $w = (a, b, c)$. *Posons enfin* $d := -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. *Alors*

$$ax + by + cz + d = 0$$

est une équation cartésienne de $A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

Question 10. *Si* $\mathcal{P}$ *est le plan défini par l'équation cartésienne*

$$ax + by + cz + d$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, *comment trouver une équation paramétrique de* $\mathcal{P}$ *?*

Réponse. *Comme* $(a, b, c) \neq 0$, *il y a au moins un des réels parmi* a, b, c *qui est non nul. Supposons que ce soit le cas de* a. *Si ce n'est pas le cas de* a, *adapter ce qui suit en changeant le rôle des lettres.*

$$\begin{aligned}
ax + by + cz + d = 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} ax + by + cz + d & = & 0 \\ y & = & t \\ z & = & s \end{array}\right. \qquad \text{pour } t, s \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & \frac{-bt-cs-d}{a} \\ y & = & t \\ z & = & s \end{array}\right. \qquad \text{pour } t, s \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -\frac{d}{a} - \frac{b}{a}t - \frac{c}{a}s \\ y & = & t \\ z & = & s \end{array}\right. \qquad \text{pour } t, s \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ce qui est bien une équation paramétrique.