Faculté des Sciences Aix-Marseille Université — Année universitaire 2016–2017
Site : ■ Luminy ☐ St-Charles
Sujet session de: Juin 2017 — Durée de l'épreuve: 3 heures
Examen de ■ Licence ☐ Master ☐ DU — Libellé diplôme: Licence de Mathématiques Générales
Code Apogée du module: SMI5U1L — Libellé du module: Intégration dans $\mathbb{R}^N$ et transformée de Fourier
Documents autorisés: ☐ Oui ■ Non — Calculatrices Type Collège autorisées: ☐ Oui ■ Non

Université d'Aix-Marseille — **Année 2016-2017**
Licence de Mathématiques Générales - L3

Examen de juin 2017, durée : 3h
U.E. Intégration sur $\mathbb{R}^N$ et transformée de Fourier

Les calculatrices ou autre matériel électronique, les notes de cours ou de TD ne sont pas autorisés.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Questions du cours 1 - Passage à la limite sous le signe d'intégration.

1. Rappeler le Théorème de Convergence monotone (on ne demande pas à démontrer ce résultat).
2. Rappeler le Lemme de Fatou (on ne demande pas à démontrer ce résultat).
3. Rappeler le Théorème de Convergence dominée (on ne demande pas à démontrer ce résultat).

Questions du cours 2 - Tribu et mesure produit.

1. Rappeler la définition de la tribu produit.
2. Rappeler la définition d'un espace mesuré σ-fini.
3. Enoncer le théorème d'existence et unicité de la mesure produit.

Exercice 2 - Inégalité de Hölder.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $p, q, r \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q + 1/r = 1$. Montrer qu'on a l'inégalité
$$abc \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} + \frac{c^r}{r}.$$
2. Soient (E, T, m) un espace mesuré et $p, q, r \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q + 1/r = 1$. On considère $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m), g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m), h \in \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $fgh \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et
$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$
3. L'inégalité précédente reste valable si $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q + 1/r = 1$?

Exercice 3 - Dérivation d'un produit de convolution.

Soient $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in C^1_b(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une fonction de classe C^1, bornée, dont la dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$. On note $f * g$ le produit de convolution entre f et g
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que $f * g$ et $f' * g$ sont bien définis.
2. A l'aide de la formule des accroissements finis, exprimer $(\ (f*g)(x+h)-(f*g)(x)\ )/h$, $x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
3. En déduire que $f * g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$(f * g)' = f' * g.$$

4. A présent on suppose que f est une fonction bornée, dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$. Les conclusions du point précédent restent elles valables dans ce cas ?