Faculté des Sciences Aix-Marseille Université
Année universitaire 2015–2016
Site : ■ Luminy □ St-Charles
Sujet session de: Juin 2016
Examen de ■ Licence □ Master □ DU
Code Apogée du module: SMI5U1TC
Documents autorisés: □ Oui ■ Non

Durée de l'épreuve: 3 heures
Libellé diplôme: Licence de Mathématiques Générales
Libellé du module: Intégration dans $\mathbb{R}^N$ et transformée de Fourier
Calculatrices Type Collège autorisées: □ Oui ■ Non

Université d'Aix-Marseille **Année 2015-2016**
Licence de Mathématiques Générales - L3

Examen 2ième session, juin 2016, durée : 3h
U.E. Intégration sur $\mathbb{R}^N$ et transformée de Fourier

Les calculatrices ou autre matériel électronique, les notes de cours ou de TD ne sont pas autorisés.
La clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Questions du cours 1 - Intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

1. Rappeler la définition de l'intégrale pour les fonctions étagées positives.
2. Rappeler les propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$: la linéarité positive et la monotonie.

Questions du cours 2 - Inégalités de Hölder et Minkowski.

1. Démontrer l'inégalité de Young
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad p, q \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
2. Rappeler l'inégalité de Hölder. Démontrer cette inégalité.
3. Rappeler l'inégalité de Minkowski. Démontrer cette inégalité.

Exercice 1 - Intégrale semi-convergente.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin y|}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y \geq \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}}.$$
On considère désormais la fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x, y) = e^{-x^2 y} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$
2. Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} h(x, y) \, \mathrm{d}x$.
3. La fonction h est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$?

4. Vérifier que $y \to -\frac{x^2 \sin y + \cos y}{x^4+1} e^{-x^2 y}$ est une primitive de la fonction $y \to h(x,y)$.

5. Démontrer que la fonction $x \to \frac{x^2+1}{x^4+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6. Pour tout $A > 0$ on pose $h_A(x) = \int_0^A h(x,y)\ \mathrm{d}y$. Soit $(A_n)_n$ une suite de réels convergente vers $+\infty$. Justifier soigneusement que
$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} h_{A_n}(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$

7. Déduire des questions précedentes que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\ \mathrm{d}y$ existe et l'exprimer en fonction de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

Exercice 2 - Propriétés élémentaires de la convolution.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Rappeler la définition de la convolution $f * g$, avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $f * g = g * f$.

3. On suppose que f, g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, tel que $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f * g$ est alors aussi à support compact.

Exercice 3 - Transformée de Fourier.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = e^{-|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.

2. Utiliser le Théorème d'inversion pour calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.