Université d'Aix-Marseille — Année 2017-2018
Licence de Mathématiques Générales - L1 MIASHS

Correction de l'examen final, durée : 2h00
U.E. Géométrie

Exercice 0. Restitution des connaissances (3 points)

La norme d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.

(A) Dans $\mathbb{R}^2$, si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(B) Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(C) $\|v\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

(D) **Definition 1** *On dit qu'une base de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.*

(E) On écrit :

$$\|U\| = \sqrt{2/4 + 2/4} = 1$$
$$\|V\| = \sqrt{3/9 + 3/9 + 3/9} = 1$$
$$\|W\| = \sqrt{6/36 + 6/36 + 6/9} = 1$$

Les trois vecteurs sont de norme 1.
On calcule le produit scalaire de U et V : $U.V = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 = 0$ et de même pour $U.W$ et $V.W$. On remarque que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 2 : Intersection de plans (5 points)

1. Les vecteurs normaux à ces deux plans ont pour coordonnées (1,1,1) et (1,-1, 5) et ne sont pas colinéaires. Les plans se coupent donc selon une droite qui est représenté par le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z + 2 \\ x - y = -5z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -6z + 6 (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 2y = 4z - 2 (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z + 3 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

En posant $z = k$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -3k + 3 \\ y = 2k - 1 \\ z = k \end{array} \right.$$

C'est la droite passant par le point (3,-1,0) et dirigé par le vecteur de coordonnées (-3,2,1).

2. Les plans d'équations $x + y - 2z = 1$ et $x - y - 4z = 3$ ont des vecteurs normaux non colinéaires et leur intersection est une droite Δ.

   On trouve par la même méthode que la question précédente

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} x = 3z + 2 \\ y = -z - 1 \end{array} \right.$$

   Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ x - y - 4z = 3 \\ 2x + 3y - 3z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3z + 2 \\ y = -z - 1 \\ 2(3z + 2) + 3(-z - 1) - 3z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3z + 2 \\ y = -z - 1 \\ 0 \times z = 0 \end{array} \right.$$

   La dernière équation est vérifiée pour tout z réel, le système a une infinité de solutions :

$$S = \{(3z + 2, -z - 1, z), z \in \mathbb{R}\}$$

   En fait Δ est incluse dans le plan d'équation $2x + 3y - 3z = 1$, l'intersection des trois plans est donc cette droite Δ.

3. En pivot de Gauss, on effectue les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$L_3 \leftarrow 5L_1 - L_3$$

   Puis

$$L_2 \leftarrow L_2/3$$
$$L_3 \leftarrow L_3/3$$

   On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = -4 \\ y = -2 \\ -2 - 2z = -8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

EXERCICE 1

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(1,-1,-1)$ et $(2,-5,-3)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ à partir de la première coordonnée et $-k = -5$ ou encore $k = 5$ à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et il n'existe donc pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) Ainsi, les trois points A, B et C définissent un unique plan.

a)

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC) ou encore

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est orthogonale au plan } (ABC).}$$

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(0,4,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$. Une équation cartésienne de ce plan est $2(x-0) - (y-4) + 3(z-1) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

c) Δ est la droite passant par $D(7,-1,4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,-1,3)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

d) Soit $M(7+2t, -1-t, 4+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(3,1,-2)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (3,1,-2).}$$

3) a) $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1,1,1)$ et $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1,4,0)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ sont sécants en une droite.}}$$

b) Soit $M(-4t-2, t, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d.

$$(-4t-2) + (t) + (3t+2) = 0$$

et

$$(-4t-2) + 4(t) + 2 = 0.$$

Ainsi, tout point de d appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et donc

$$\boxed{\text{la droite d est la droite d'intersection des plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2.}$$

Exercice 3 : Produit vectoriel (3 points)

1. Soient $\vec{u}(a;0;0)$ et $\vec{w}(b;c;0)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   $\vec{u} \wedge \vec{w}$ a pour coordonnées $(0-0;0-0;ac-0)$, c'est-à-dire $(0;0;ac)$
   $(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w}$ a pour coordonnées $(0-ac^2;acb-0;0-0)$ c'est-à-dire $(-ac^2;acb;0)$.
   On a aussi $\vec{u}.\vec{w} = ab$, et $\|w\| = b^2+c^2$.
   D'où $(\vec{u}.\vec{w}).\vec{w}$ et $\|w\|^2\vec{u}$ ont pour coordonnées respectives $(abb;abc;0)$ et $((b^2+c^2)a;0;0)$.
   $(\vec{u}.\vec{w}).\vec{w} - \|w\|^2\vec{u}$ a pour coordonnées $(-ac^2;abc;0)$ Donc
   $$(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{w} - ||\vec{w}||^2\vec{u} \qquad (1)$$

2. **a.** Si $\vec{u_0}$ existe, il vérifie (??), c-a-d :
   $$(\vec{u_0} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u_0}.\vec{w})\vec{w} - ||\vec{w}||^2\vec{u_0}$$
   Ici, on impose $\vec{u_0}.\vec{w} = 0$ et $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.
   Alors il faut : $\vec{v} \wedge \vec{w} = -||\vec{w}||^2\vec{u_0}$.
   Réciproquement, soit $\vec{u_0} = -\frac{1}{||\vec{w}||^2}\vec{v} \wedge \vec{w} = \frac{1}{||\vec{w}||^2}\vec{w} \wedge \vec{v}$
   $\vec{u_0}$ est orthogonal à $\vec{w}$ car colinéaire à $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
   Vérifie-t-il $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v}$?
   $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = -\frac{1}{||\vec{w}||^2}(\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w}$: on retrouve (??).
   $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = -\frac{1}{||\vec{w}||^2}[\underbrace{(\vec{v}.\vec{w}).\vec{w}}_{\text{0 car } \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{w} \text{ par hypothèse}} - ||\vec{w}||^2\vec{v}]$
   On a donc bien $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.
   $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant orthogonaux, il existe un seul vecteur $\vec{u_0}$ orthogonal à $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v}$ c'est $\vec{u_0} = \frac{1}{||\vec{w}||^2}\vec{w} \wedge \vec{v}$.
   b. On recherche l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.
   Or on sait $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v}$.
   On a donc par différence : $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{u_0}) \wedge \vec{w} = 0$.
   Le produit vectoriel est nul ssi $(\vec{u} - \vec{u_0})$ est colinéaire à $\vec{w}$. Donc $\vec{u_0} \wedge \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{u_0}) = k\vec{w}, k \in \mathbb{R}$.
   Les vecteurs $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v}$ sont définis par $\vec{u} = \vec{u_0} + k\vec{w}$ avec $\vec{u_0} = \frac{1}{||\vec{w}||^2}\vec{w} \wedge \vec{v}, k \in \mathbb{R}$

EXERCICE 4 : corrigé

Proposition 1	**FAUX**
Proposition 2	**VRAI**
Proposition 3	**FAUX**
Proposition 4	**FAUX**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, $C(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et $D(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

Justification 1 : Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives les points $(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$ et $(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-2, 4, -1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6, -12, 3)$.
On note alors que $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$. Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ou encore les points A, B et C sont alignés.
On sait alors que les points A, B et C ne définissent pas un unique plan. La proposition 1 est fausse.

Justification 2 : Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - 2z + 9 = 0$.

- $x_A - 2z_A + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$. Donc le point A appartient au plan (P).
- $x_B - 2z_B + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point B appartient au plan (P).
- $x_D - 2z_D + 9 = -1 - 8 + 9 = 0$. Donc le point D appartient au plan (P).

Les points A, B et D appartiennent au plan (P). Puisque les points A, B et D définissent un unique plan, une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$. La proposition 2 est vraie.

Justification 3 : S'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x_A = \frac{3}{2}t - 5 \\ y_A = -3t + 14 \\ z_A = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases},$$

alors en particulier, $-\frac{3}{2}t + 2 = 5$ et donc $t = -2$ et aussi $-3t + 14 = 2$ et donc $t = 4$. Ceci est impossible et donc le point A n'appartient pas à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est fausse.

Justification 4 : Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, -1, 5)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n'}(-3, -1, 1)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles. La proposition 4 est fausse.