Université d'Aix-Marseille — Licence MIASHS

Semestre 1 — 2017/2018

Correction du DM

Exercice 1. 1) L'aire d'un parallélogramme est le produit de la base par la hauteur. Les parallélogrammes ont la même base a_1 et une hauteur identique ; donc la même aire. voir dessin au tableau

2) Observer que si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = |ad|$ et $|ad|$ est clairement l'aire du rectangle associé. Ensuite par une transformation comme en 1), on peut se ramener d'une matrice triangulaire T à une matrice diagonale D, alors l'aire du parallélogramme correspondant à $\det(T)$ est l'aire du rectangle $\det(D)$. Puis, on peut de la même manière passer d'une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ à une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, et alors $\det(A)$ l'aire du parallélogramme engendré par u, v est la même que l'aire du parallélogramme engendré par u', v' correspondant à la matrice triangulaire, donc égale à $\det(T)$.

Exercice 2. Les points M appartenant à l'intersection de P et P' sont les points dont le triplet de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution du système :

$$S = \begin{cases} 2x + y + -2z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Comme le déterminant $\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$ n'est pas nul, on peut exprimer x et y en fonction de z :

$$S' = \begin{cases} x = 5z + 1 \\ y = -8z + 1 \end{cases}$$

et le système S' est equivalent au système S. Il en résulte que l'ensemble des triplets de solutions du système S est l'ensemble des triplets (x, y, z) tel que :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 8t \\ z = 0 + 1t \end{cases}$$

lorsque t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ Autrement dit, ce sont les points de la droite D contenant le point A : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et admettant le vecteur directeur $\vec{U} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Exercice 3. voir correction au tableau

Exercice 4. voir correction au tableau

Exercice 5. 1) Le développement de $|z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ donne :$|z|(\cos(\theta)+i|z|\sin(\theta)$ qui est la forme algébrique de z. L'unicité de cette forme implique : $|z|(\cos(\theta)=-1, |z|\sin(\theta)=\sqrt{3}$; d'où $\cos(\theta)=\frac{-1}{|z|}, \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{|z|}$ ce qui permet de trouver $\cos(\theta), \sin(\theta)$ donc θ. En effet $|z|^2=(-1)^2+\sqrt{3}^2$. Ainsi $|z|=2, \cos(\theta)=\frac{-1}{2}, \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; nous trouvons donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$. La forme trigonométrique de z est donc $z=2(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}))$. Une forme exponentielle est $z=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.
2) Lorsque Z est écrit sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r>0$ alors r est le module de Z et θ un argument. Mais ce n'est pas le cas lorsque $r<0$. Il faut donc s'assurer du signe $1-\sqrt{2}$. Or $1-\sqrt{2}<0$. Pour obtenir la forme exponentielle de Z, nous écrivons : $Z=-(1-\sqrt{2})(-e^{i\frac{\pi}{4}})$ donc $Z=-(1-\sqrt{2})(-\cos(\frac{\pi}{4})-i\sin(\frac{\pi}{4}))$ et nous savons que $-\cos(\theta)=\cos(\theta+\pi)$ et $-\sin(\theta)=\sin(\theta+\pi)$ d'où $Z=-(1-\sqrt{2})(\cos(\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4})=-(1-\sqrt{2})(e^{i\frac{5\pi}{4}})$
Le module de Z est $-1+\sqrt{2}$ et un argument $\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 6. La méthode consiste à multiplier dénominateur et numérateur par le conjugué du dénominateur.
θ est différent de π, modulo 2π, donc $e^{i\theta}$ est différent de -1, donc $z=1+e^{i\theta}$ n'est pas nul.
Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$, le conjugué de 1 est 1, donc le conjugué de $1+e^{i\theta}$ est $1+e^{-i\theta}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués)
Donc $Z=\frac{(1-e^{i\theta})1+e^{-i\theta}}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})}$ Le dénominateur est $z\overline{z}=|z|^2$ Et on remarque que $|z|^2=2(1+\cos(\theta))$
Ainsi

$$Z=\frac{-i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

Exercice 7. 1) On a

$$z_C=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}z_D=\mathrm{i}\times 2\mathrm{i}=-2$$

2) dessin.
3) a)

$$\frac{z_F-z_C}{z_E-z_C}=\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}+2}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2}=\frac{(3-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}{(3+\mathrm{i}\sqrt{3})(3-\mathrm{i}\sqrt{3})}=\frac{6-6\mathrm{i}\sqrt{3}}{12}=\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$$

c'est-à-dire que l'angle défini par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF})$ est $-\dfrac{\pi}{3}$ et que $CE=CF$.
b) Le triangle est donc équilatéral.
c) Par conséquent, le centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité G (on rappelle que les droites remarquables (médianes, médiatrices) sont confondues). L'affixe de G est $\dfrac{z_E+z_F+z_C}{3}=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}+1-\mathrm{i}\sqrt{3}-2}{3}=0$ donc $G=O$.
Le rayon du cercle circonscrit est $OC=|z_C|=2$.
4) a) r fixe son centre F et (d'après les questions 3.a et 3.b) envoie E sur C, donc $z_{F'}=z_F$ et $z_{E'}=z_C$.

$$\begin{aligned}
z_{C'} &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(z_C - z_F) + z_F \\
&= \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(-2-1+\mathrm{i}\sqrt{3}) + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \\
&= -3 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \\
&= -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que l'image $(E'F'C') = (CFC')$ du triangle équilatéral (EFC) par la rotation r reste un triangle équilatéral.
b) L'image dun cercle par une rotation est un cercle de même rayon. L'image de Γ par la rotation r est donc le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe

$$\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(z_O - z_F) + z_F = \ldots$$

ou plus simplement :

$$\frac{z_{E'} + z_{F'} + z_{C'}}{3} = \frac{-2+1-\mathrm{i}\sqrt{3}-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{3} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

c) L'image réciproque de Γ par r est égale à son image directe par r^{-1}, c'est-à-dire le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(z_O - z_F) + z_F = \left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - 1\right)(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\left(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)}{2} = 2$$