Aix Marseille Université		2016-2017
Licence MIASHS	**Travaux Dirigés de Géométrie**	1ère année-S1
	Fiche n° 3	

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère : $\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (4,5,6), \vec{c} = (7,8,9); \vec{u} = (2,2,1), \vec{v} = (1,1,-1), \vec{w} = (0,1,1)$;
$\vec{A} = \left(-3, \frac{2}{3}, 1\right), \vec{B} = \left(3, -\frac{1}{3}, 2\right), \vec{C} = (27,-1,36); \overrightarrow{U} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \overrightarrow{V} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{W} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

1. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?
2. Peut-on exprimer $\vec{c}$ comme Combinaison Linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$? $\vec{v}$ comme C. L. de $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$?
3. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? Peut-on exprimer $\vec{a}$ comme C. L. de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$? tout vecteur (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ comme C. L. de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$? $\vec{a}$ comme Combinaison Linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
4. Le triplet $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right)$ forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$? $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ forme-t-il une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?
5. Calculer $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ puis $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1. On considère le point $U = (-1,2,-3)$ et les vecteurs $\vec{a} = (-2,5,1), \vec{b} = (3,1,-4)$.
1.1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{A}$ passant par U et dirigé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
1.2. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{B}$ d'équation cartésienne $21x + 5y + 17z = 240$.
1.3. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2. On considère le point $V = (7,5,4)$ et le vecteur $\vec{c} = (1,2,3)$.
2.1. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{C}$ passant par V et dirigée par $\vec{c}$.
2.2. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
2.3. Déterminer les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite (UV).
3. Soit $\mathcal{R}$ le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.
3.1. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$.
3.2. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note (x,y,z) les coordonnées dans le repère ou la base canonique.
1. $A = (0,1,-1), B = (2,-5,8), C = (1,1,-1)$ sont-ils alignés ? Donner une représentation paramétrique pour la droite (AB) puis pour le plan (ABC). Montrer que $\mathcal{D} = \{(2x-2, 5-2x, -7+3x), x \in \mathbb{R}\}$, est une droite du plan (ABC). Le point $D = (4,-2,7)$ appartient-il à ce plan ?
2. $A = (1,0,2), B = (2,1,3/2), C = (3,2,1), D = (-1,3,2), E = (-1,-7,4)$, sont-ils coplanaires ?
3. Déterminer le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{D} = \begin{cases} x = 4-3t \\ y = 2-3t \\ z = -5-t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}' = \begin{cases} x = 4+3r \\ y = -2-r \\ z = 6r \end{cases} r \in \mathbb{R}$
4. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A = (3,-2,5)$ et parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $\mathcal{Q} : 2x + y - 3z + 7 = 0$.

Exercice 4

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note (x,y,z) les coordonnées dans le repère ou la base canonique.
1. Donner un point et deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x + 2y + z = 1$.
2. Donner deux points distincts et un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne : $2x + 3y - z = 4$.
3. Donner les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$ et interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.
5. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne : $3x + y - z = 2$.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$ et interpréter géométriquement ses solutions.
7. Soient $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ neuf réels quelconques, montrer que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
8. Montrer que trois plans sont sécants en un point si et seulement si leurs vecteurs normaux ne sont pas coplanaires.