Aix Marseille Université		2015-2016
Licence MIASHS	**Travaux Dirigés de Géométrie**	1ère année-S1
	Fiche n° 3	

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (2, 2, 1), \vec{v} = (1, 1, -1), \vec{w} = (0, 1, 1)$ et $\vec{U} = \left(-3, \frac{2}{3}, 1\right), \vec{V} = \left(3, -\frac{1}{3}, 2\right), \vec{W} = (27, -1, 36)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

2. $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont-ils colinéaires ? $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ sont-ils coplanaires ?

3. Calculer $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}$.

4. Peut-on exprimer $\vec{C} = (7, 8, 9)$ comme Combinaison Linéaire de $\vec{A} = (1, 2, 3)$ et $\vec{B} = (4, 5, 6)$.

Exercice 2

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point $U = (-1, 2, -3)$ et les vecteurs $\vec{a} = (-2, 5, 1), \vec{b} = (3, 1, -4)$.

1.1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{A}$ passant par U et dirigé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1.2. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{B}$ d'équation cartésienne $21x + 5y + 17z = 240$.

1.3. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

2. On considère le point $V = (7, 5, 4)$ et le vecteur $\vec{c} = (1, 2, 3)$.

2.1. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{C}$ passant par V et dirigée par $\vec{c}$.

2.2. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

2.3. Déterminer les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite (UV).

3. Soit $\mathcal{R}$ le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

3.1. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$.

3.2. Donner les positions relatives et l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère ou la base canonique.

1. $A = (0, 1, -1), B = (2, -5, 8), C = (1, 1, -1)$ sont-ils alignés ? Donner une représentation paramétrique pour la droite (AB) puis pour le plan (ABC). Montrer que $\mathcal{D} = \{(2x - 2, 5 - 2x, -7 + 3x), x \in \mathbb{R}\}$, est une droite du plan (ABC). Le point $D = (4, -2, 7)$ appartient-il à ce plan ?

2. $A = (1, 0, 2), B = (2, 1, 3/2), C = (3, 2, 1), D = (-1, 3, 2), E = (-1, -7, 4)$, sont-ils coplanaires ?

3. Déterminer le plan $\mathcal{P}$ contenant les droites $\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}' = \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 3r \\ y = -2 - r \\ z = 6r \end{array} \right. \quad r \in \mathbb{R}$

4. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par $A = (3, -2, 5)$ et parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $\mathcal{Q} : 2x + y - 3z + 7 = 0$.

5. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A = (1, 1, 1)$ et $B = (2, 1, 0)$ et tel que la droite $\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{array} \right.$ soit parallèle à $\mathcal{P}$.

6. Examiner les positions relatives des sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ donnés par

6.1. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2u \\ y = -1 - 5u \\ z = 3u \end{array} \right. \quad u \in \mathbb{R}$

6.2. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 1 - k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + u + 4t \\ y = 4u + 5t \\ z = 3 - 2u - 5t \end{array} \right. \quad (u, t) \in \mathbb{R}^2$

6.3. $\mathcal{A} : 2x - y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{B} : x + y = 2z + 2$

6.4. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = s + t \\ z = t + 3s \end{array} \right. \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (AB)$ où $A = (-1, 2, -3)$ et $B = (3, 2, -1)$.

6.5. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2p - q \\ y = 3 - p + 2q \\ z = 1 + 4p - 3q \end{array} \right. \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} : 5x - 2y - 3z = 11$.

Exercice 4

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère le plan $\mathcal{P}$ et les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ donnés par :

$$\mathcal{P} : x - 2y + 3z = -1, \qquad \mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - 2u \\ y = -1 + 4u \\ z = -6u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = -1 + 9t \\ z = 5 + 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner deux vecteurs directeurs, un vecteur normal et un point du plan $\mathcal{P}$.
2. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont-ils perpendiculaires ?
3. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}'$ sont-ils parallèles ?

Exercice 5

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ donnés par leur équation cartésienne $\mathcal{P} : x - y + z - 2 = 0$ et $\mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0$.
1. Montrer que ces deux plans sont sécants en une droite $\mathcal{D}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Soit Δ la droite passant par $A = (2, 4, 3)$ et dirigée par $\vec{u} = (-1, -3, 2)$. On considère aussi le point $B = (1, 1, 1)$.
3. Donner une représentation paramétrique de Δ et montrer que $B \notin \Delta$.
4. Donner un équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par B et contenant la droite Δ.
5. Calculer la distance du point B au plan $\mathcal{Q}$.
6. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{E}$ passant par B et perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}$.
7. Donner les coordonnées du point K projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{Q}$. Calculer la distance BK.

On considère le point $C = (9, -3, 3)$.
8. Donner les coordonnées du milieu I du segment $[B, C]$.
9. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{S}$ médiateur du segment $[B, C]$.
10. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{T}$ passant par C et orthogonal à Δ.
11. Donner les coordonnées du point L intersection de $\mathcal{T}$ et de Δ.
12. Calculer la distance CL et la norme $\|\vec{u}\|$. Donner les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA}$.
13. Vérifier que l'on a $\dfrac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{CA}\|}{\|\vec{u}\|} = CL$.

Exercice 6

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on note (x, y, z) les coordonnées dans le repère ou la base canonique et on considère les quatre points $A = \left(1, 0, \frac{3}{2}\right), B = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right), C = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et $D = (4, 3, 0)$.

1. Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Donner les composantes d'un vecteur orthogonal au plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n} = (1, -1, 2)$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD).
5. Montrer que les quatre points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
6. Montrer que le plan (ABC) et la droite (AD) sont perpendiculaires.
7. Donner une équation cartésienne du plan passant par B et perpendiculaire aux plans $\mathcal{P} : x - 2y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : y - 2z + 1 = 0$.
8. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par C et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
9. Calculer la distance de C au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 7

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$
2. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$.
3. En déduire que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge w) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$.