Aix Marseille Université
Licence MIASHS

2015-2016
1ère année-S1

Travaux Dirigés de Géométrie Fiche n° 2

Exercice 1

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+y+z=8 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2x+5y+7z=-1 \\ 4x+11y+5z=-1 \\ 3x+9y-4z=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=-4 \\ 2x-y+2z=-2 \\ -3x+y-z=-2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-z & =1 \\ 4x+5y-3z & =1 \\ 6x+8y-4z & =2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x-y+z-t=-2 \\ 2x-3y+z+t=1 \\ x+y+z+t=0 \\ -x-y+3z+2t=-5 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^2$ plan cartésien, on considère les quatre points $A=(1,2), B=(-3,4), C=(-2,5), D=(2,7)$; déterminer α, β, γ réels tels que D soit barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Exercice 3

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé.

1. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A=(2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}=(1,-1)$

2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A=(1,1)$ et perpendiculaire à la droite Δ représentée par $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2t \\ y & = & -1+t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que les points $A=(-1,3), B=(-6,-2), C=(2,-6)$ et $D=(3,1)$ forment un trapèze dont les diagonales sont orthogonales.

4. On considère les points $A=(-1,-1)$ et $B=(2,3)$ et $C=(3,-3)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB), déterminer la distance du point C à cette droite. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB) et retrouver la distance $d(C,(AB))$.

5. Soient $P(4,0), Q(2,3)$ et $R(6,3)$, vérifier que $OPRQ$ est un parallélogramme, puis calculer son aire.

6. Donner une équation cartésienne du cercle de centre $I(5,-4)$ et de rayon 7

7. Donner le diamètre du cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2+x-3y-3=0$ puis les coordonnées de son centre J.

8. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x,y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}=0$

9. On considère les deux droites $D: 3x+4y+3=0$ et $D': 12x-5y+4=0$, montrer que ces deux droites sécantes et déterminer une équation de chacune de leurs bissectrices.

Exercice 4

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants :

$I=(1,0), \quad J=(0,1), \quad A=(2,0), \quad B=(-2,\sqrt{3}), \quad C=(-2,0), \quad D=(-2,-\sqrt{3}), \quad S=\left(-\frac{3}{8},0\right)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Calculer les distances BD, BI et DI, en déduire la nature du triangle BDI.

3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $BJDE$ soit un parallélogramme.

4. Donner les coordonnées du milieu T de $[A,D]$.

5. Montrer que les droites (ST) et (DA) sont orthogonales.

6. Montrer que S est le centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

7. Calculer l'aire du parallélogramme $BJDE$.

Exercice 5

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considére $A=(-2,3), B=\left(4,\frac{3}{2}\right), C=\left(3,-\frac{5}{2}\right), D=(-3,-1)$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2. Déterminer la distance du point A à la droite (BD).

3. Donner une équation cartésienne de la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BD).

4. Déterminer les coordonnées de H et K projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD).

Exercice 6

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$, montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4(\vec{u}\cdot\vec{v})$

2. Soit $ABCD$ un parallèlogramme dans $\mathcal{P}$, montrer que $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

3. Soient E,F,G trois points non alignés de $\mathcal{P}$.

3.1. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{P}$ on a : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{FM}=0$

3.2. Montrer que la hauteur issue de E dans le triangle EFG et celle issue de F ne sont pas parallèles, on notera H leur point d'intersection.

3.3. Montrer que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}=0$ et en déduire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.