Aix Marseille Université — 2016-2017

Licence MIASHS — 1ère année-S1

Travaux Dirigés de Géométrie   Fiche n° 1

Exercice 1

On se place dans $\mathbb{R}^2$, x et y désignent des variables réelles.

1. Déterminer les solutions des équations linéaires suivantes :

$$2x+3y=4 \qquad 5x-8y=9(x+y) \qquad \frac{3x}{2}-4y=\frac{5}{4} \qquad \sqrt{2}y+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=-1 \qquad -5x+\frac{4}{3}=0$$

2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y=1 \\ x+3y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y+4=5x+11y \\ 2x+4y=2 \end{cases}$$

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^3$, x, y et z désignent des variables réelles.

1. Déterminer les solutions des équations linéaires suivantes :

$$2x+3y+4z=5 \qquad -5x+2y=5(z-x) \qquad \frac{3x}{2}-4y=\frac{5}{4} \qquad -5x+\frac{4}{3}=0$$

2. Par la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 2x-y+2z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=-4 \\ 2x-y+2z=-2 \\ -3x+y-z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+5y+7z=-1 \\ 4x+11y+5z=-1 \\ 3x+9y-4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=2 \\ -x+y+z=4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+5y-3z=1 \\ 6x+8y-4z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+y+z=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x+3y-4z=2 \\ -4x-5y+6z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y-z=9 \\ 3x+9y-3z=-1 \\ -2x+y-5z=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ -2x+y+4z=4 \\ 10x-5y-6z=-10 \end{cases}$$

Exercice 3

Calculer les déterminants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x-1 & \sqrt{2} \\ y+1 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} e^x+e^{-x} & e^x-e^{-x} \\ e^x-e^{-x} & e^x+e^{-x} \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix}$

Exercice 4

Pour tous les systèmes linéaires qui précèdent :

1. Donner l'écriture matricielle $A \cdot X = B$ et indiquer ceux qui sont de Cramer.

2. Donner le système homogène associé et décrire les ensembles de solutions de ce dernier.

3. Dans les cas suivants et en utilisant les formules de Cramer, résoudre les systèmes d'écriture matricielle $A \cdot X = B$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. Comparer ces calculs avec ceux de la résolution par pivot de Gauss.

Exercice 5

Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+(a+3)y+3z=2 \\ x+(3-a)y+(a-2)z=3 \end{cases}$ admet-il une unique solution ?