Travaux Dirigés de Géométrie Fiche n° 1

Exercice 1

1. Le vecteur $\vec{z} = \vec{u} - \sqrt{3}(\vec{v} - \sqrt{2}\vec{u}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v} + \sqrt{3}(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v})$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{u}$?
2. Sachant que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{BC}$, exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ puis représenter les trois points A, B, C.
3. Sachant que $\frac{2}{7}\overrightarrow{RP} - \frac{3}{4}\overrightarrow{RQ} = \vec{0}$, exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{PQ}$ puis représenter les trois points P, Q, R.
4. G_1 barycentre de $\{(A,2),(B,3)\}$, G_2 barycentre de $\{(A,3),(B,-1)\}$, exprimer $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4y=0 \\ -\sqrt{2}x+\sqrt{8}y=0 \end{cases}, \begin{cases} -x+5y=0 \\ -2x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

2. Evaluer les déterminants : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x-1 & \sqrt{2} \\ y+1 & -2 \end{vmatrix}$.

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on note (x,y) les coordonnées dans le repère ou la base canonique.
1. Représenter les vecteurs $\vec{u} = (1,2); \vec{v} = (3,4); \vec{w} = (5,6)$; les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Exprimer $\vec{w}$ comme Combinaison Linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $\vec{a} = \left(-\sqrt{12}, \dfrac{2}{3}\right), \vec{b} = \left(\sqrt{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ et $\vec{c} = (\sqrt{3}, 9)$; $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils colinéaires ? $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils colinéaires ?
3. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A = (1,-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (-3,4)$.
4. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) lorsque $A = (3,4)$ et $B = (6,-2)$. Les points $C = (2, 10/3)$ et $D = (11/3, 41/9)$ appartiennent-ils à la droite (AB). Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes de coordonnées. Quel est le point d'abscisse -3 de (AB) et celui d'ordonnée -4.
5. Donner une équation cartésienne de la droite passant par l'origine et parallèle à la droite $x+y-1=0$
6. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB), lorsque $A = (1,-2)$ et $B = (3,1)$. Placer les points de paramètre -1 et $3/2$. Le point $R = (8/3, 1/2)$ appartient-il à la droite (AB). Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes de coordonnées.
7. Montrer que $\mathcal{A} = \begin{cases} x = \sqrt{2}t+1 \\ y = -2t-1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \begin{cases} x = -2k+3 \\ y = 2\sqrt{2}(k-1)-1 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$ sont deux représentations paramétriques de la même droite. Donner une équation cartésienne de cette droite.
8. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ représentée par $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
9. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A = (1,-2)$ et parallèle à la droite d'équation cartésienne $x+2y-1=3$.
10. Déterminer l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ lorsque $\mathcal{D} : 7x+8y=2$ et $\mathcal{D}' : 9x+10y=4$ puis lorsque $\mathcal{D} : -9x+15y=1$ et $\mathcal{D}' : 6x-10y = \frac{-2}{3}$ et enfin lorsque $\mathcal{D} : (\sqrt{3}+1)x+4y=7$ et $\mathcal{D}' : \frac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1$.
11. Déterminer le centre de gravité du triangle ABC lorsque $A = (1,2), B = (0,3), C = (-1,-4)$.

Exercice 4

A, B et C sont trois points non alignés
1. Sachant que $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. Sachant que $2\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} = \vec{0}$, exprimer $\overrightarrow{AF}$ comme Combinaison Linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.
3. Représenter les cinq points A, B, C, E, et F et donner leurs coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
4. Soit I le milieu de $[A,F]$, montrer que les points I, E et C sont alignés.
5. Soit J le milieu de $[A,C]$, montrer que les points J, E et F sont alignés.
6. Quelle est la nature du quadrilatère $IBCJ$?

Exercice 5

$ABCD$ est un parallèlogramme non aplati, S, R et E sont donnés par $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.
Montrer que $(EB) \mathbin{/\!/} (RS)$ puis que $(AC), (RB)$ et (ES) sont concourantes.
Indication : On pourra considérer le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Exercice 6

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en O ; A, B, C trois points de $\mathcal{D}$; A', B', C' trois points de $\mathcal{D}'$ tels que $(AB') \mathbin{/\!/} (BC')$ et $(BA') \mathbin{/\!/} (CB')$ montrer que $(AA') \mathbin{/\!/} (CC')$.