Intégration et transformée de Fourier

Exercices et indications

Chapitre 1. Introduction

Exercice 1. (Convergence/non convergence de l'intégrale)
Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, 1/n] \\ n\left(\frac{2}{n} - x\right), & x \in]1/n, 2/n] \\ 0, & x \in]2/n, 1]\,. \end{cases}$$

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$. Peut-on passer à la limite sous le signe intégral ?
2. Mêmes questions pour la suite de fonctions $(g_n)_n$, avec $g_n = nf_n, n \geq 2$.

Exercice 2. (Limite inférieure/supérieure)
Soit $(x_n)_n$ une suite réelle. On définit les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ par

$$a_n = \inf_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}, \quad b_n = \sup_{k \geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Montrer que $(a_n)_n$ est une suite croissante et que $(b_n)_n$ est une suite décroissante.
   On appelle la limite inférieure de la suite $(x_n)_n$, notée $\liminf_{n\to+\infty} x_n$, la limite de la suite $(a_n)_n$
   $$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$
   On appelle la limite supérieure de la suite $(x_n)_n$, notée $\limsup_{n\to+\infty} x_n$, la limite de la suite $(b_n)_n$
   $$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
   On appelle valeur d'adhérence (v.a.) de la suite $(x_n)_n$, tout $l \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est la limite d'une sous suite extraite de $(x_n)_n$.
2. Montrer que la limite inférieure de $(x_n)_n$ est la plus petite v.a. de $(x_n)_n$ et que la limite supérieure de $(x_n)_n$ est la plus grande v.a. de $(x_n)_n$.
3. Montrer qu'une suite $(x_n)_n$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ ssi $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n$.
4. Soit $(y_n)_n$ une autre suite de réels et on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n$, $\limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n$ sont bien définis dans $\overline{\mathbb{R}}$ (autrement dit on se place dans les cas autres que $\infty - \infty$). Montrer les inégalités
   $$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$
5. En déduire que si les suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ admettent des limites (dans $\mathbb{R}$, pour simplifier), alors la suite $(x_n + y_n)_n$ admet une limite (dans $\mathbb{R}$) et que
   $$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

6. Généraliser le résultat du point précédent au cas des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$.
7. Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ deux suites à valeurs positives. Montrer que

$$(\liminf_{n\to+\infty} x_n)(\liminf_{n\to+\infty} y_n) \leq \liminf_{n\to+\infty}(x_n y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}(x_n y_n) \leq (\limsup_{n\to+\infty} x_n)(\limsup_{n\to+\infty} y_n).$$

8. Soit $\lambda \geq 0, \mu \leq 0$. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty}(\lambda x_n) = \lambda \liminf_{n\to+\infty} x_n, \quad \limsup_{n\to+\infty}(\lambda x_n) = \lambda \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

   et que

$$\liminf_{n\to+\infty}(\mu x_n) = \mu \limsup_{n\to+\infty} x_n, \quad \limsup_{n\to+\infty}(\mu x_n) = \mu \liminf_{n\to+\infty} x_n.$$

9. Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante, définie dans un intervalle fermé borné $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) = F(\liminf_{n\to+\infty} x_n), \quad \limsup_{n\to+\infty} F(x_n) = F(\limsup_{n\to+\infty} x_n).$$

10. Formuler et démontrer le même type de résultat pour une fonction $G : I \to \mathbb{R}$ continue, mais décroissante, définie dans un intervalle fermé bornée I.

Exercice 3. (Fonctions caractéristiques)
Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. Montrer que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2. Montrer que $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$, avec $A^c = E \setminus A$.
4. Montrer que $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)$.
5. Montrer que $\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$, avec $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
6. Montrer que $A = B$ ssi $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.
7. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$ et que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
8. Montrer que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 4. (Limite inférieure/supérieure d'ensembles)
Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. On suppose la suite $(A_n)_n$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ en fonction de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. Même question que précédemment si la suite est définie par $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B, p \in \mathbb{N}$, A, B étant deux parties de E.
3. Montrer que

$$\mathbf{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n} = \limsup_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}, \quad \liminf_{n\to+\infty} A_n \subset \limsup_{n\to+\infty} A_n, \quad \mathbf{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n} = \liminf_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n}.$$

4. Montrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \{x \in E \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n^c}(x) < +\infty\}, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \{x \in E \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = +\infty\}.$$

Chapitre 2. Tribus et mesures

Exercice 5. (Partie infinie d'un ensemble dénombrable)

1. Montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable.
2. Montrer que toute partie infinie au plus dénombrable est dénombrable.

Exercice 6. (Produit fini d'ensembles dénombrables)

1. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout $k \geq 2$.
3. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 7.
Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Exercice 8. (Réunion dénombrable d'ensembles dénombrables)
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties dénombrables d'un ensemble E. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.

Exercice 9. (Cantor)
Montrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Exercice 10. (Cantor)
Soit E un ensemble. Alors E n'est pas équipotent à l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 11. (Caractérisation d'une tribu)
Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et telle que $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il tribu ?

Exercice 12. (Tribu engendrée)
Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $T_{\mathcal{A}}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$. Montrer que $T_{\mathcal{A}}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).
3. Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E, alors $T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
4. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T_{\mathcal{A}}, T_{\mathcal{B}}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $T_{\mathcal{A}} \subset T_{\mathcal{B}}$.
5. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset T(\mathcal{A})$, alors $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$.

Exercice 13. (Tribu trace)

1. Soit T une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $T_F = \{A \cap F,\ A \in T\}$ est une tribu sur F (la tribu trace de T sur F).

2. Si E est un espace topologique et $T = \mathcal{B}(E)$ est la tribu borélienne de E, montrer que la tribu trace sur F, notée T_F, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(F)$.
   Indication : Montrer que $\mathcal{B}(F) \subset T_F$. Pour montrer que $T_F \subset \mathcal{B}(F)$, considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E), A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu sur E contenant les ouvers de E.
3. Si F est un borélien de E, montrer que T_F est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

Exercice 14. (Tribu image)
Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{P}(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit T' une tribu sur F. On pose $f^{-1}(T') = \{f^{-1}(B), B \in T'\}$. Montrer que $f^{-1}(T')$ est une tribu sur E (c'est la tribu image réciproque de T' par f).
2. Soit T une tribu sur E. On pose $T' = \{B \subset F, f^{-1}(B) \in T\}$. Montrer que T' est une tribu sur F (c'est la tribu image directe de T par f).
3. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de F. On pose $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{C}\}$. Montrer que $T(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(T(\mathcal{C}))$.
   Indication : On pourra montrer d'abord que $T(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(T(\mathcal{C}))$. Puis, pour montrer que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, montrer que $\{G \subset F, f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 15. (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$)
On note T la tribu sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\{A \times B \ : \ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une union au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ : \ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu sur $\mathbb{R}$, contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ : \ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 16. (Exemple de mesure)
Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 17. (Exemple de probabilité)
Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini, dénombrable et $(p_k)_k \subset [0, 1]$ tel que $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E), A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k,x_k\in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie précédemment est une probabilité.

Exercice 18. (Différence de deux unions)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini(*i.e.*, $m(E) < +\infty$) et $(A_n)_n$, $(B_n)_n$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n).$$
2. Montrer que
$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (m(A_n) - m(B_n)).$$

Exercice 19. (Intersection d'ensembles pleins)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_n \subset T$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que

$$m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E).$$

Exercice 20. (Propriétés des mesures)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes.

1. Monotonie : Soit $A, B \in T, A \subset B$. Alors $m(A) \leq m(B)$.
2. σ sous-additivité : Soit $(A_n)_n \subset T$. Alors
$$m(\cup_n A_n) \leq \sum_n m(A_n).$$
3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_n \subset T$ telle que $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Alors
$$m(\cup_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \sup_{n\to+\infty} m(A_n).$$
4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_n \subset T$ telle que $A_{n+1} \subset A_n, n \in \mathbb{N}$ et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $m(A_{n_0}) < +\infty$. Alors
$$m(\cap_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \inf_{n\to+\infty} m(A_n).$$

Exercice 21. (Limites inf et sup d'ensembles)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(A_n)_n \subset T$. On rappelle que

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} A_p, \;\; \limsup_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{p\geq n} A_p.$$

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $m(\cup_{p\geq n_0} A_p) < +\infty$. Montrer que :
$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$
2. Donner un exemple pour lequel
$$m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) < \limsup_{n\to+\infty} m(A_n).$$
Indication : Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on prend $A_n = [n, n+1[$.
3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E) < +\infty$) pour lequel
$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) < \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$
Indication : Dans $([0,4], \mathcal{B}([0,4]), \lambda)$ on prend $A_{2n} = [0,2], A_{2n+1} = [1,4], n \in \mathbb{N}$. On a
$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) = 1, \;\; \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) = 2, \;\; \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 3, \;\; m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 4.$$
4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < +\infty$. Montrer que $m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

Exercice 22. (Petit ouvert dense)
On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\varepsilon > 0$. Peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ?
Indication : l'ensemble des rationnels étant dénombrable, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q} = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$. On considère l'ouvert $O_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \varphi(n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$.

Exercice 23. (Une caractérisation de la mesure de Lebesgue)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m([0,1]) = 1$ et pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$m(I) = m(I+x), \quad \text{avec } I + x = \{a + x, a \in I\}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $m(\{x\}) = 0$ (*i.e.,* m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indication : pour tout $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\{x, x+1/n, ..., x+(n-1)/n, x+1\} \subset [x, x+1]$ et donc $(n+1)m(\{x\}) \le m([x, x+1]) = 1$. On en déduit que $m(\{x\}) = 0$. Ainsi $m([0,1[) = m([0,1]) = 1$. On pourra découper $[0,1[$ en n intervalles de longueur $1/n$ pour en déduire que $m([0,1/n]) = m([0,1/n[) = 1/n, n \in \mathbb{N}^\star$, etc.

Chapitre 3. Fonctions mesurables

Exercice 24. (Caractérisation des fonctions mesurables)
Soit (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $T_f = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); f^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu.
2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) L'application f est mesurable ;
   (b) Pour tout $C \in \mathcal{C}$ on a $f^{-1}(C) \in T$.

Exercice 25. (Composition de fonctions mesurables)
Soit $(E,T), (F,S)$ deux espaces mesurables, $f : E \to F$, $\varphi : F \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Exercice 26. ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$...)
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \ge 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).
Indication : on peut utiliser les caractérisations suivantes

1. Soit $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ ssi $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = B$ ou $A = B \cup \{+\infty\}$.

Exercice 27. (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient $(E,T), (E',T'), (E'',T'')$ des espaces mesurables, $f : E \to E'$, $g : E' \to E''$. On suppose que f, g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de $E \to E''$.
2. Soit (E,T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soient f, g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f^+, f^- sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

(b) Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_n$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in E$. On pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.
Indication : montrer d'abord la stabilité de $\mathcal{M}$ par passage à l'infimum et supremum.

(c) Montrer que $f+g, fg, |f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
Indication : une fonction de E dans $\mathbb{R}$ est mesurable ssi elle est la limite d'une suite de fonctions étagées.

(d) Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ tel que $B \notin T$. Montrer que $h = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

Exercice 28. (Mesurabilité des fonctions continues)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne.

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne) ;
2. On suppose f continue à droite (resp. à gauche). Montrer que f est mesurable ;
   Indication : On suppose f continue à droite. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le -n \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si } \frac{p-1}{n} < x \le \frac{p}{n}, \ \ p \in \{-n^2+1, ..., n^2\} \\ 0 & \text{si } x \ge n \end{cases}$$

   de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) \mathbf{1}_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

   On a $f_n \in \mathcal{E}$. Pour $n > |x|$ on a $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ avec $\frac{p-1}{n} \le x \le \frac{p}{n}$. Comme f est continue à droite en x, on a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.
3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.
   Indication : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ est un intervalle, donc un borélien. En effet on montrer que si $a = \inf A$, alors $]a, +\infty[\subset A \subset [a, +\infty[$.

Exercice 29.
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, montrer qu'une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition.
3. Donner un exemple de fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable pour la tribu engendrée par cette partition. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons]

Exercice 30. (Mesurabilité de $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$)
On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ est-elle mesurable ?

Exercice 31. (Egalité presque partout)

1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g$ λ p.p. ssi $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0. Montrer que $f = g$ δ_0 p.p. ssi $f(0) = g(0)$.

Exercice 32. (Convergence en mesure)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_n$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p. ;
   Indication : On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{x \in E; |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$.
2. Montrer que si $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$;
3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n g_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $fg \in \mathcal{M}$;
   Indication : On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_n \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0, k \geq k_0$ on a
   $$m(\{x \in E \ : \ |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$
   Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.
   Indication : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), f_n(x) = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star, g_n(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $f_n \to 0$ en mesure, $g_n \to g$ en mesure et $f_n g_n \not\to 0$ en mesure.

Exercice 33. (Convergence p.u. et convergence p.p.)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset \mathcal{M}, f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (*i.e.,* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

Exercice 34. (Théorème d'Egorov)
Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$. Pour $j \in \mathbb{N}^\star, n \in \mathbb{N}$ on pose

$$A_{n,j} = \{x \in E, \ : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \quad B_{n,j} = \cup_{p \geq n} A_{p,j}.$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n \to +\infty} m(B_{n,j}) = 0$;
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$.
   Indication : On cherchera A sous la forme $\cup_{j \in \mathbb{N}^\star} B_{n(j),j}$, avec un choix judicieux de n_j : $m(B_{n(j),j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Exercice 35. (Convergence en mesure et fonctions continues)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$;
2. On suppose, dans cette question, que m est finie. Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.
   Indication : On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a \to +\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$.

3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnat un exemple, qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Indication : $X(x) = x, X_n(x) = x + 1/n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^\star$, $\varphi(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 36. (Mesurabilité des troncatures)
Soit (E, T) un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour $a > 0$, on définit la fonction tronquée suivante

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si } f(x) < -a. \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Chapitre 4. Fonctions intégrables

Exercice 37.
Soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$. On note $f\mathbf{1}_A \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f\mathbf{1}_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A f \mathrm{d}m$ par $\int f\mathbf{1}_A \, \mathrm{d}m$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors $\int_A f \mathrm{d}m = 0$.
2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ telles que $f = g$ p.p.. Alors $\int f \, \mathrm{d}m = \int g \, \mathrm{d}m$.
3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ telle que $f = 0$ p.p.. Alors $\int f \, \mathrm{d}m = 0$.

Exercice 38. (Sup de mesures)
Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_n$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \to +\infty} m_n(A)$ pour tout $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire)
   Soit $(a_{n,p})_{n,p \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_p \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ telles que $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \quad \text{dans } \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

   Indication : on pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_p.$$

2. Montrer que m est une mesure.
3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$ (on rappelle que $\mathcal{E}_+(E, T)$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$). Montrer que

$$\int f \, \mathrm{d}m = \sup\left\{\int f \, \mathrm{d}m_n, \; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E,T)$.
   (a) Montrer que $(\int f \mathrm{d}m_n)_n$ est une suite croissante, majorée par $\int f \mathrm{d}m$.
   Indication : Soit $(f_p)_p \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_p \uparrow f$ quand $p \to +\infty$. On a

$$\int f_p \, \mathrm{d}m_n \le \int f_p \, \mathrm{d}m_{n+1} \le \int f_p \, \mathrm{d}m$$

   et on passe à la limite quand $p \to +\infty$.
   (b) Montrer que $\int f \, \mathrm{d}m_n \to \int f \, \mathrm{d}m$ lorsque $n \to +\infty$.
   Indication : On pose $A_f = \{g \in \mathcal{E}_+, g \le f\}$. On sait que

$$\int f \, \mathrm{d}m = \sup_{g \in A_f} \int g \, \mathrm{d}m = \sup_{g \in A_f} \sup_n \int g \, \mathrm{d}m_n = \sup_n \sup_{g \in A_f} \int g \, \mathrm{d}m_n = \sup_n \int f \, \mathrm{d}m_n.$$

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f \, \mathrm{d}m_n \to \int f \, \mathrm{d}m$ quand $n \to +\infty$.
   Indication : $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et alors $\int |f| \mathrm{d}m_n \le \int |f| \mathrm{d}m < +\infty$. On en déduit

$$\lim_{n \to +\infty} \left\{ \int f^+ \, \mathrm{d}m_n - \int f^- \, \mathrm{d}m_n \right\} = \int f^+ \, \mathrm{d}m - \int f^- \, \mathrm{d}m.$$

Exercice 39. (Sommes de mesures)
Soient m_1, m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.
2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que

$$\int f \, \mathrm{d}m = \int f \, \mathrm{d}m_1 + \int f \, \mathrm{d}m_2.$$

   Indication : Analyser les cas $\varphi \in \mathcal{E}_+, \varphi \in \mathcal{M}_+, f \in \mathcal{L}^1$.
3. Soit $(m_n)_n$ une famille de mesures positives sur (E,T) et $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}^\star_+$. On pose, pour $A \in T, m(A) = \sum_n \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T. Soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m. Montrer que

$$\int f \, \mathrm{d}m = \sum_n \alpha_n \int f \, \mathrm{d}m_n.$$

   Indication : Soit $\tilde{m}_n = \alpha_n m_n$. C'est une mesure sur T, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n)$, $\int f \mathrm{d}\tilde{m}_n = \alpha_n \int f \mathrm{d}m_n$. On pose par récurrence sur n : $\mu_0 = \tilde{m}_0, \mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n, n \in \mathbb{N}^\star$. On vérifie que μ_n est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu_n)$ ssi $f \in \cap_{p \le n} \mathcal{L}^1(E,T,\tilde{m}_n) = \cap_{p \le n} \mathcal{L}^1(E,T,m_n)$. Toujours par récurrence

$$\int f \, \mathrm{d}\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f \, \mathrm{d}\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f \, \mathrm{d}m_n.$$

   Pour tout $A \in T$, $m(A) = \sum_n \alpha_n m_n(A) = \sup_n \mu_n(A)$. On peut utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1(E,T,\mu_n)$ pour tout n, $\int f \mathrm{d}m = \lim_{n \to +\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n = \sum_n \alpha_n \int f \, \mathrm{d}m_n$.

Exercice 40. (Intégrale pour la mesure de Dirac)
Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Calculer $\int f \, \mathrm{d}\delta_0$

Exercice 41. ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$)
Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.
Indication : Prendre $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in]0,1[$.

Exercice 42. (Majoration d'une fonction intégrable décroissante)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que f est borélienne (et donc borélienne positive).
2. On suppose que $\int f \mathrm{d}\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq \frac{C}{x}$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   Indication : Prendre $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathbf{1}_{[n, n+1/n^2]}$.

Exercice 43. (Caractérisation d'une fonction caractéristique)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f \mathrm{d}m = \int f^2 \mathrm{d}m$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = \mathbf{1}_A$ p.p..
Indication : $\int f(1-f)\mathrm{d}m = 0$ d'où $f(1-f) = 0$ p.p.. On pose $A = \{x \in E : f(x) = 1\}$ et alors $f = 0$ p.p. sur A^c.

Exercice 44. (f positive intégrable implique f finie p.p.)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\int f \mathrm{d}m < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..
Indication : $A = f^{-1}(\{+\infty\}) \in T$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $f \geq n\mathbf{1}_A$, d'où $nm(A) \leq \int f \mathrm{d}m$.

Exercice 45. (Une caractérisation de l'intégrabilité)
Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in E \;:\; |u(x)| \geq n\}, \;\; B_n = \{x \in E \;:\; n < |u(x)| \leq n+1\}.$$

1. Montrer que

$$\int |u| \, \mathrm{d}m < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} n \, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) < +\infty.$$

   Indication : $\sum_n n\mathbf{1}_{B_n} \leq |u| \leq \sum_n (n+1)\mathbf{1}_{B_n}$, d'où $\sum_n nm(B_n) \leq \int |u| \mathrm{d}m \leq \sum_n (n+1)m(B_n)$. On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $C_n = \{n \leq |u| < n+1\}$

$$\int |u| \, \mathrm{d}m < +\infty \Leftrightarrow \sum_n n \, m(C_n) < +\infty.$$

   On utilise aussi $m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1})$.
2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que

$$\int |u|^p \, \mathrm{d}m < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} n^p \, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{p-1} \, m(A_n) < +\infty.$$

Exercice 46. (Sur la convergence en mesure)
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_n, (g_n)_n$ deux suites de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soit f, g deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f, g_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f, g \in \mathcal{L}^1_R(E, T, m)$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq k_1 \Rightarrow m(\{x \in E \;:\; |g(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq n_0,\; k \geq k_0 \Rightarrow m(\{x \in E \;:\; |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$

(c) Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

(d) En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
Indication : Prendre $f_n(x) = f(x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,1[}(x)}{\sqrt{x}}, g_n(x) = g(x) = \frac{\mathbf{1}_{]0,1[}(x)}{\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$ (pour cet exemple on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).
Indication : Prendre $f_n(x) = \frac{x}{n(x^2+1)}, g_n(x) = x^2 + 1, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 47. (Application du théorème de convergence monotone)
Soient $T > 0$ et $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0, T], \mathcal{B}(]0, T[), \lambda)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \to e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int e^{nx} f(x) \mathrm{d}\lambda \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p. (appliquer le théorème de convergence monotone).
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, T]$.

Exercice 48. (Lemme de Fatou et convergence en mesure)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$), f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$, en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \frac{1}{2^k}, n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ (la fonction φ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}, A_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $B_n = \cup_{p=n}^{+\infty} A_p$.

   (b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} m(B_n) = 0$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

$$\int_{B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| \; \mathrm{d}m \leq \int_{A_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| \; \mathrm{d}m \leq 2 \int |g_n| \; \mathrm{d}m. \tag{1}$$

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| \mathrm{d}m \leq M$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| \; \mathrm{d}m \leq 2M \tag{2}$$

   (on pourra noter que $\int |g_n| \mathrm{d}m \leq M$, utiliser (1) et faire tendre $n \to +\infty$).

(b) Montrer que

$$\int |f| \mathrm{d}m \leq 2M \tag{3}$$

(on pourra utiliser (2) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et faire tendre $n \to +\infty$).

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (3) reste vrai avec αM au lieu de $2M$, dès que $\alpha > 1$. En déduire que (3) reste vrai avec M au lieu de $2M$.

N.B. : Une autre méthode pour démontrer (3) (avec M au lieu de $2M$) consiste à remarquer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de f_n vers f). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.

Exercice 49. (Mesure de densité)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f \mathrm{d}m$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.
2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $(fg)(x) = 0$ si $f(x) = +\infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g \mathrm{d}\mu = \int fg \mathrm{d}m$.

Exercice 50. (Théorème de Beppo-Lévi)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f : E \to \mathbb{R}$, tels que
(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.
(ii) La suite $(f_n)_n$ est monotone.

1. Construire $(g_n)_n \subset \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{M}$ tels que $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $(g_n)_n$ monotone.
2. Montrer que $f \in L^1$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, \mathrm{d}m \in \mathbb{R}$.
3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 51. (Préliminaire pour le théorème de Vitali. Equi-intégrabilité et équi-petitesse à l'infini)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in L^1$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$A \in T, m(A) \leq \delta \implies \int_A |f| \, \mathrm{d}m \leq \varepsilon.$$
Indication : Choisir un représentant de f et considérer $f_n = \inf\{|f|, n\}, n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ tel que $m(C) < +\infty$, $\int_{C^c} |f| \, \mathrm{d}m \leq \varepsilon$, $\sup_C |f| < +\infty$.
Indication : Choisir un représentant de f et considérer $C_n = \{x \in E : \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}, n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que pour n assez grand, C_n vérifie les propriétés demandées.

Exercice 52. (Théorème de Vitali)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ tels que $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose que $m(E) < +\infty$. Montrer que $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_n$ est équi-intégrable.
Indication : Utiliser le Théorème d'Egorov et le lemme de Fatou.
2. On suppose maintenant que $m(E) = +\infty$. Montrer que $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_n$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in T, m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| \mathrm{d}m \leq \varepsilon$ pour tout n.

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Exercice 53. (Convergence en mesure dominée)
Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

a) $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.

b) Il existe g, fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$m(\{\ |f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{\ |f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}).$$
2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $m(\{\ |f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que f est intégrable.
3. On suppose dans cette question que $m(E) < +\infty$.
   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int |f_n - f|\ \mathrm{d}m \leq \eta m(E) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g\ \mathrm{d}m.$$
   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \mathrm{d}m = 0$.
4. On ne suppose plus que $m(E) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \mathrm{d}m = 0$.

Exercice 54. (Intégrale des fonctions continues)
Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que
$$\int f\ \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$$
(cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues).

Exercice 55. (Sur l'inégalité de Markov)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a
$$a\ m(\{\ |f| > a\}) \leq \int_{\{|f| > a\}} |f|\ \mathrm{d}m.$$
2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a
$$m(\{\ |f| > a\}) \leq \frac{\int |f|\ \mathrm{d}m}{a}.$$

Exercice 56. (Sur la positivité presque partout)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que
$$f \geq 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow \int_A f\ \mathrm{d}m \geq 0 \ \text{ pour tout } A \in T.$$

Exercice 57. (Suite bornée convergeant dans L^1)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1(E,T,m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int |f_n - f|^2 \,\mathrm{d}m \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Indication : Comme la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans L^1, elle contient une sous-suite qui converge p.p.. On en déduit que $|f| \leq C$ p.p..

Exercice 58. (Convergence uniforme et convergence des intégrales)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$ (plus précisément : il existe des représentants de f_n, encore notés f_n, tels que f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ telle que $f = g$ p.p. si $g \in F$) ?
2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n \mathrm{d}m)_n$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$?

Exercice 59. (Convergence dans L^1 de fonctions positives)
Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_n \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n \mathrm{d}m \to \int f \mathrm{d}m$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
Indication : On pourra examiner la suite $(f - f_n)^+$.

Exercice 60. (Exemple de convergence)
On pose $(E,T,m) = ([-1,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est bornée dans L^1 et que la suite $(\int f_n \mathrm{d}\lambda)_n$ converge.
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_n$ dans $L^1(E,T,m)$?
4. Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi \mathrm{d}\lambda \to \int \varphi \mathrm{d}\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 61. (Continuité d'une application de L^1 dans L^1)
Soit (E,T,m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^\star \ : \ |g(s)| \leq C|s| + C, \ \ s \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
2. On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Pour $u \in L^1$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m), h = g \circ v \textit{ p.p.}\} \in L^1$, avec $v \in u$.
Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est-à-dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
3. Soit $(u_n)_n \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ telle que $|u_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.
4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1.
Indication : On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé réciproque partielle de la convergence dominée.

Exercice 62. (Continuité sous le signe d'intégration)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $t_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse

$$f(\cdot, t) \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On suppose de plus que

1. L'application $f(x, \cdot)$, définie pour presque tout $x \in E$, est continue en t_0.
2. Il existe $\varepsilon > 0$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ tels que $|f(\cdot, t)| \leq G$ p.p., pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int f(\cdot, t) \, \mathrm{d}m$ est continue en t_0.

Exercice 63. (Dérivabilité sous le signe d'intégration)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $t_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse

$$f(\cdot, t) \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in T$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ tels que $m(A) = 0$ et

1. L'application $t \to f(x, t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.
2. Pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ nous avons $|\partial_t f(x, t)| \leq G(x)$.

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $F(t) = \int f(\cdot, t) \, \mathrm{d}m$ est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \, \mathrm{d}m.$$

Exercice 64. (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration)
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t, x) = \mathrm{ch}(\frac{t}{1+x}) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, \cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x) \, \mathrm{d}\lambda$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 65.
Soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. Supposons que $f \in \mathcal{M}_+$, $A \in T$ et $\int_A f \, \mathrm{d}m = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ p.p.t. $x \in A$.
   Indication : considérer l'ensemble $A_n = \{x \in A \ : \ f(x) > 1/n\}, n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{M}_+$ telle que $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, \mathrm{d}m = \int f \, \mathrm{d}m$. Montrer que pour tout $A \in T$ on a
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_A f_n \, \mathrm{d}m = \int_A f \, \mathrm{d}m.$$
   Indication : appliquer le lemme de Fatou aux suites $(\mathbf{1}_A f_n)_n$ et $(\mathbf{1}_{A^c} f_n)_n$.
3. Soit $A \in T$. Appliquer le lemme de Fatou à la suite $(f_n)_n$ définie par
   $$f_{2n} = \mathbf{1}_A, \quad f_{2n+1} = \mathbf{1}_{A^c}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 66.
Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Appliquer le lemme de Fatou à la suite définie par $f_n = \mathbf{1}_{[n, n+1[}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que le théorème de convergence monotone ne s'applique pas aux suites décroissantes, en considérant la suite $(f_n)_n$ donnée par $f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty[}, n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que $F(x) = \int_{]-\infty, x]} f \, \mathrm{d}\lambda$ est continue, en utilisant le théorème de convergence monotone.
   Indication : considérer les suites $f_n = \mathbf{1}_{]-\infty, x-1/n[} f, g_n = \mathbf{1}_{]x+1/n, +\infty[} f$, $n \in \mathbb{N}^\star$, en observant que $\mathbf{1}_{]-\infty, x-1/n[} \uparrow \mathbf{1}_{]-\infty, x[}$ et $\mathbf{1}_{]x+1/n, +\infty[} \uparrow \mathbf{1}_{]x, +\infty[}$, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 67.
Soient (E,T,m) un espace mesuré, et f,g,h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p,q,r \in]1,+\infty[$, tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Montrer que

$$\int |fgh| \, \mathrm{d}m \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

(En convenant que $0 \times (+\infty) = 0$.)

Exercice 68. (Produit $L^p - L^q$)
Soient (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et q le conjugué de p. Soient $(f_n)_n \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_n \subset L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ tels que $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $\int f_n g_n \, \mathrm{d}m \to \int fg \, \mathrm{d}m$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 69. (Convergence de $\|\cdot\|_p$ quand $p \to +\infty$)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact. Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ lorsque $p \to +\infty$.

Exercice 70. (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou)
Soit (E,T,m) un espace mesuré. Pour $p \in [1,+\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Soit $p \in [1,+\infty[$, $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose que $p=1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n|+|f|-|f_n-f|$. Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
2. Supposons maintenant que $p \in]1,+\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.
   Indication : On prend $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n-f|^p$.

Exercice 71. (Séries orthogonales dans L^2)
Soit (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ deux à deux orthogonaux. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge dans L^2 si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2$ est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 72. (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$)
Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, muni de sa norme usuelle, n'est pas un espace de Hilbert, si $1 \leq p \leq +\infty$, $p \neq 2$.
Indication : On prend $f = \mathbf{1}_{]0,1[}$ et $g = \mathbf{1}_{]1,2[}$. Nous avons

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1, \ \ \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2^{1/p}.$$

Pour $p \neq 2$, l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée.

Exercice 73. (projection orthogonale dans L^2)
On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et, pour $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2 \ : \ \alpha \leq f \leq \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.
2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \leq 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe, fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x),\beta\},\alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ici $P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.

Exercice 74. (Intégrale d'une fonction positive)
Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = \mathbf{1}_A$ avec $A = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E,\ 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$-mesurable.
2. Montrer que
$$\int f \, \mathrm{d}m = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E \ : \ f(x) > t\}) \, \mathrm{d}t$$
et que
$$\int f \, \mathrm{d}m = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E \ : \ f(x) \geq t\}) \, \mathrm{d}t.$$
Ind. : Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 75. (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 76. (Intégrale de Dirichlet)

1. Vérifier que si $n \geq 1$
$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^n \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t \right) \sin x \, \mathrm{d}x.$$
2. Calculer $F_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x \, \mathrm{d}x, \ \ t \geq 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} F_n(t) \, \mathrm{d}t$.
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 77. (Propriétés élémentaires de la convolution)
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f \star g = g \star f$.
Ind. : Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variable simples.
2. On suppose que f, g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, tel que $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f \star g$ est alors aussi à support compact.
Ind. : Comme f, g sont à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0, a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0, b)^c$. Montrer que $f \star g = 0$ p.p. sur $B(0, a + b)^c$.

Exercice 78. (Convolution $L^p - C_c^\infty$)
Soit $1 \leq p \leq +\infty, f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors
$$f \star \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot) \, \mathrm{d}\lambda_N.$$

2. Montrer que $f \star \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}^N$, noté K, tel que $f = 0$ p.p. sur K^c. Montrer que $f \star \rho$ est aussi à support compact.

Exercice 79. (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-x^2-y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 80. (Régularité de λ_N)
Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ telle que $m(K) < +\infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$.

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que
$$F \subset A \subset O, \quad m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que
$$m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert tel que } A \subset O\}.$$

Exercice 81. (Inégalité de Young)
Soient $1 < p < +\infty, f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N), g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f \star g$ est définie p.p., que $f \star g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et que $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Exercice 82.

Partie A

1. Soit f une fonction mesurable positive sur $J = [0, +\infty[$ et $(A_n)_n \subset \mathcal{B}(J)$ une partition de J.
Démontrer que $\int_J f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_n \int_{A_n} f(t)\, \mathrm{d}t$. En déduire que f est intégrable sur J si et seulement si la série numérique de terme général $\int_{A_n} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
2. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \geq \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}}.$$
3. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur J ?

Partie B

On considère désormais la fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par
$$h(x, y) = e^{-x^2 y} \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

1. Calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} h(x, y)\, \mathrm{d}x$.
2. La fonction h est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
3. Vérifier que $y \to -\frac{x^2 \sin y + \cos y}{x^4+1} e^{-x^2 y}$ est une primitive de la fonction $y \to h(x, y)$.
4. Démontrer que la fonction $x \to \frac{x^2+1}{x^4+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour tout $A > 0$ on pose $h_A(x) = \int_0^A h(x, y)\, \mathrm{d}y$. Soit $(A_n)_n$ une suite de réels convergente vers $+\infty$. Justifier soigneusement que
$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} h_{A_n}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$
6. Déduire des questions précedentes que $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, \mathrm{d}y$ existe et l'exprimer en fonction de $\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

Exercice 83. On désigne par λ_1 la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$ et par λ_2 la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive λ_1-intégrable. Pour tout $t > 0$ on pose $F(t) = \lambda_1(\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > t\})$.

1. Justifier la bonne définition de $F(t)$ et son appartenance à $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que F est décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Quelle est la limite de F en 0 ? Quelle est la limite de F en $+\infty$?
4. Justifier que la fonction $(x, t) \mapsto f(x) - t$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$?
5. Soit $A = \{(x, t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[\ : \ f(x) - t > 0\}$. En calculant $\lambda_2(A)$, établir :
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_0^{+\infty} F(t)\, \mathrm{d}\lambda_1(t).$$

Chapitre 7. Transformation de Fourier

Exercice 84. (Application du théorème d'inversion)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$. Montrer que $f\hat{g}, g\hat{f} \in L^1$ et
$$\int f\hat{g}\, \mathrm{d}\lambda = \int g\hat{f}\, \mathrm{d}\lambda.$$
2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $\mathbf{1}_B \star \mathbf{1}_B = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que
$$\hat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}, \ \ y \in \mathbb{R}.$$
4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ tel que $\hat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) On note $\varphi_n = \theta_n\hat{f}$. Montrer que $\varphi_n \nearrow \hat{f}$ et $\int \varphi_n\, \mathrm{d}\lambda \nearrow \int \hat{f}\, \mathrm{d}\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \hat{\theta}_n(y)\, \mathrm{d}y = \alpha, n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire que $\hat{f} \in L^1$.