Université d'Aix-Marseille | Licence MIASHS
Semestre 1 | 2017/2018

**Devoir Maison, à rendre pour le 16 novembre**

## 0.1 Géométrie dans le plan et l'espace

**Exercice 1. La notion de déterminant : interprétation géométrique**
1) Soit $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire du parallélogramme délimité par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est la même que l'aire du parallélogramme délimité par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2} + c.\vec{V_1}$, où $c$ est un scalaire.
2) Montrer que si $A$ est une matrice $2 \times 2$, $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$,
alors l'aire du parallélogramme déterminé par les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ est égale à $|\det A|$.
Indication : Travailler d'abord avec une matrice diagonale $D$ ; puis utiliser la question 1) pour comparer le cas d'une matrice triangulaire avec le cas de la matrice diagonale ; enfin traiter le cas général, la matrice : $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, avec $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.
2)

**Exercice 2. Intersection de deux plans**
Les plans $P$ et $P'$ ont pour equations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 3 = 0 \\ x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Décrire l'intersection de ces plans.

**Exercice 3. Produit vectoriel**
1. Montrer que $(\vec{u}.\vec{v})^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2.||\vec{v}||^2$
2. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w} + (\vec{u}.\vec{w}).\vec{v}$
3. En déduire que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$

**Exercice 4. Equations de plans**
Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on considère les deux plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ donnés par leur equation cartésienne : $\mathcal{P} : x - y + z - 2 = 0$, $\mathcal{Q} : x + 2y - z + 1 = 0$.
1) Montrer que ces deux plans sont sécants en une droite $\mathcal{D}$
2) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$
Soit $\Delta$ la droite passant par $A = (2, 4, 3)$ et dirigé par $\vec{u} = (-1, -3, 2)$. On considère aussi le point $B = (1, 1, 1)$.
3) Donner une représentation paramétrique de $\Delta$ et montrer que $B \neq \Delta$.
4) Donner une equation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par $B$ contenant la droite $\Delta$.
5) Calculer la distance du point $B$ au plan $\mathcal{Q}$.
6) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{E}$ passant par $B$ et perpandiculaire au plan $\mathcal{Q}$.
7) Donner les coordonnées du point $K$ projeté orthogonal de $B$ sur le plan $\mathcal{Q}$. Calculer la distance $BK$.

On considère le point $C = (9, -3, 3)$.
8) Donner les coordonnées du milieu $I$ du segment $[BC]$
9) Donner une equation cartésienne du plan $\mathcal{S}$ du segment $[BC]$
10) Donner une equation cartésienne du plan $\mathcal{T}$ passant par $C$ et orthogonal à $\Delta$
11) Donner les coordonnées du point $L$ intersection de $\mathcal{T}$ et de $\Delta$.
12) Calculer la distance $CL$ et la norme $||u||$. Donner les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{CA}$
13) Vérifier que l'on a $\frac{||u \wedge \vec{CA}||}{||\vec{u}||} = CL$.

## 0.2 Nombres complexes

**Exercice 5. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement**
1) Ecrivez le nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$, sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.
2) Donnez le module et un argument de $Z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

**Exercice 6.** Trouver la forme algébrique de $Z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$ où $\theta$ est un réel différent de $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 7. Rotations avec les complexes**
Soient $E, F, D$ les points d'affixes respectives :

$$z_E = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$z_F = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$
$$z_D = 2\mathrm{i}$$

1) Calculer l'affixe du point $C$ image de $D$ par la rotation de centre $O$ (d'affixe $z_O = 0$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
2) Représenter les points dans le plan complexe dont un repère orthonormé direct est $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Faire le dessin.

3) Soit le triangle $(EFC)$.
a) Calculer l'angle défini par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF})$.
b) Déterminer la nature du triangle $(EFC)$.
c) Déterminer le centre et le rayon du cercle $\Gamma$ circonscrit au triangle.

4. Soit $r$ la rotation de centre $F$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
a) Quelles sont les images $E', F', C'$ des points $E, F, C$ par $r$ ?
b) Quelle est l'image directe de $\Gamma$ par $r$ ?
c) Déterminer l'image réciproque de $\Gamma$ par $r$.